Matemática Financeira

Versão 2010

Laércio Luis Vendite

1. INTRODUÇÃO

Nos dias atuais, o ensino de Matemática tem seguido, em várias situações, uma linha axiomática que sempre só apresenta aos alunos a etapa final de um longo desenvolvimento de idéias e criações, ou seja, aquela que todos os conceitos já estão prontos e integrados num toque de harmonia e perfeição. Dessa maneira, este tipo de apresentação faz com que a Matemática apareça completamente desvinculada da realidade e, portanto, torna-se abstrata, árida, àqueles que tem interesse de aprendê-la. Assim sendo um indivíduo que entra em uma loja para comprar um televisor enfrenta uma situação assaz complicada, ou seja, que tipo de matemática esse indivíduo terá que adotar para que tenha condição de optar pelo plano mais vantajoso para comprar esse televisor? Comprá-lo à vista com 10% de desconto ou financiá-lo a prazo em 3 parcelas iguais? Isso sem levar em consideração que esse indivíduo teve o seu salário reajustado em 5 % quando a inflação era de 10 % no período.

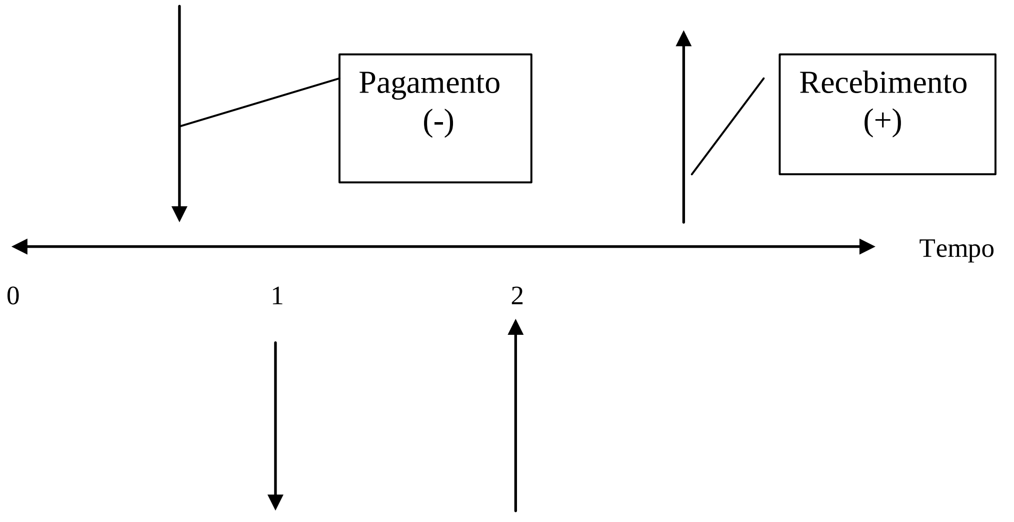
Para responder a todas esses situações-problema, procuramos, por intermédio desse pequeno espaço, abrir um grande caminho para que seja implantado no ensino básico e nas universidades, um tópico muito importante e colocado de lado em nosso cotidiano que é a Matemática Financeira. O nosso objetivo é, então, apresentar algumas atividades que introduzam os conceitos fundamentais utilizados na análise financeira convencional.

Inúmeras situações foram desenvolvidas, sendo que algumas não possuem uma solução em forma fechada e, portanto, os resultados ou aproximações somente poderão ser obtidos através de métodos numéricos aplicados aos valores em diversas tabelas financeiras.

A representação de todas as situações-problema pode ser elaborada através de esquemas denominados Fluxo de Caixa. O intuito principal é de trabalharmos com esses esquemas e de encontramos outras representações que sejam equivalentes e que nos permita fazer uma análise segura do problema inicial.

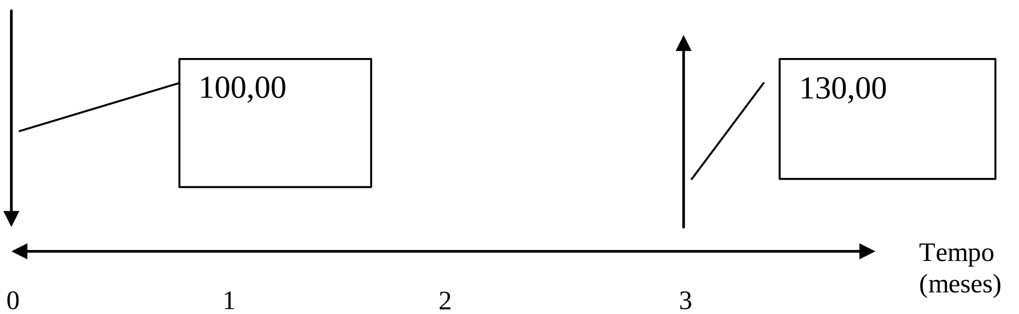
2. FLUXO DE CAIXA

Denominamos Fluxo de Caixa (de um individuo, de um investimento, de um negócio,..etc.) a representação de entradas e saídas de valores ao longo do tempo. Essa representação ao longo do tempo pose ser feita através do seguinte diagrama:



A escala horizontal representa o tempo, que pode ser expresso em dias, meses, anos.... Os números 0,1,2...representam as datas necessárias para a resolução do problema. As entradas de valores terão o sinal (+) (seta apontada para cima), e as saídas o sinal (-) (seta apontada para baixo).

Exemplo: Representar um investimento de R$ 100,00 a uma taxa de 10% ao mês, no regime de juros simples. Nesse caso, o valor a ser retirado no final do 3^0 mês será de R$ 130,00. e o fluxo de caixa será o seguinte:



Capítulo I - Juros

1. Conceitos

Na experiência prática, o conceito de juros se encontra associado a quantias monetárias, representando a remuneração ganha ao emprestar ou o custo pago ao tomar um emprestado, tendo transcorrido certo período que pode ser um dia, um mês, um ano etc.

2. Unidades

12% ao ano = 12% a.a.
14% ao semestre = 14% a.s.
1% ao mês = a.m.

2.1. Exemplo: Um capital de R$ 1.000,00 aplicado a uma taxa de 8%a.a. proporcionará, no final do 1º ano, o juro de:

$$8\%.1000 = \frac{8}{100}.1000 = 80$$

Notação: A taxa de juros pode ser expressa em porcentagem (8 %a.a.) ou fração decimal (0,08 a.a.)

3. Tipos de juros

3.1 Juros Simples: Nessa hipótese, os juros de cada período são calculados sempre em função do capital inicial empregado.

Exemplo: Qual o montante acumulado em 3 meses a uma taxa de 20% a.m., no regime de juros simples, a partir de um capital inicial de R$ 10.000,00?

Período	**Juros**	**Montante**
0	0	10.000
1	2.000	12.000
2	2.000	14.000
3	**2.000**	**16.000**
....	....	....
n	2.000	10.000 + 2000.n

Simbologia:

P = Principal ou Valor Inicial
M = Montante ou Valor Final
J = Juros da aplicação obtidos durante a aplicação
n = número de períodos
i = Taxa de juros efetiva em cada período de capitalização

Assim temos:

$$J = P.i.n \qquad \text{e} \qquad M = P.(1+i.n)$$

onde $M = P + J$

No caso anterior,

$P = 10.000{,}00$, $i = 0{,}2$ *a.m.* e $n = 3$ *logo,*

$$M = 10000.\ (1+0{,}2.3)$$

$$M = 16.000{,}00$$

3.2 Juros Compostos: Nesse regime o valor dos juros de cada período é obtido pela aplicação da taxa de juros sobre o Saldo existente no início período correspondente:
O Mercado Financeiro segue todo ele a lei de juros compostos. Assim todos os papéis de Renda Fixa, Sistema de Habitação, Crediário etc. segue o regime de juros compostos.

Exemplo: Qual o montante produzido em 3 meses a uma taxa de 20% a.m., no regime de juros compostos, a partir de um capital inicial de R$ 10.000,00?

Período	Juros	Montante
0	0	10.000
1	2.000	12.000
2	2.400	14.400
3	**2.880**	**17.280**
....	....	....
n	j	$10.000\ (1+0{,}2)^n$

Logo:

$$M = P(1+i)^n \qquad \text{e} \qquad P = \frac{M}{(1+i)^n}$$

Neste caso,

M = 10.000,00 , i = 0,2 a.m. e n = 3 logo,

$M = 10000.\ (1+0,2)^3$

M = 17.280,00

Observações:

(1) A unidade de medida de tempo *n* deve ser compatível com a unidade utilizada na taxa de juros ;
(2) A taxa de juros deve ser expressa em fração decimal e não em porcentagem.

4. Taxas de juros

4.1 Taxa efetiva ou real : É aquela em que a unidade de referência do seu tempo coincide com a unidade de tempo dos períodos de capitalização.

Exemplo: *3% a.m. capitalizados mensalmente*
4% a.d. capitalizados diariamente

4.2 Taxa Nominal: É aquela em que não há coincidência entre unidade de referência do seu tempo coincide com a unidade de tempo dos períodos de capitalização.

A taxa nominal em geral é fornecida em termos anuais e os períodos são mensais.

Exemplo:
12% a.a. capitalizados mensalmente .Isso significa uma taxa efetiva de 1% a.m.
24% a.s capitalizados mensalmente correspondem a uma taxa efetiva de 4% a.m.

4.3 Taxas Proporcionais: Duas ou mais taxas são proporcionais quando ao serem aplicadas sobre um mesmo Principal durante um mesmo prazo produzirem um mesmo Montante M, no regime de Juros Simples.

Exemplo: 12% a.a. ~ 6% a.s. ~ 3% a.t. ~ 1% a.m. poi

$$M = P(1+i_a) = P(1+i_m 12) = P(1+i_t 4) = P(1+i_d 360)$$

4.4 Taxas Equivalentes: Duas ou mais taxas são proporcionais quando ao serem aplicadas sobre um mesmo Principal durante um mesmo prazo produzirem um mesmo Montante M, no regime de Juros Compostos.

$$M = P(1+i_a) = P(1+i_m)^{12} = P(1+i_t)^4 = P(1+i_d)^{360}$$

Por exemplo, uma taxa de 4% a.m. equivale a uma taxa de 12,68% a.a. pois,

$1 + i_a = (1+ i_m)^{12}$ e se $i_m = 0{,}01$ então $i_a = (1{,}01)^{12} - 1 = 0{,}1268$

Reciprocamente uma taxa efetiva de 20% é equivalente a 1,53% a.m., pois

$$i_m = \sqrt[12]{1+i_a} - 1 = \sqrt[12]{1+0{,}2} - 1 = 0{,}0153 = 1{,}53\%$$

5. Taxa de Desconto e Taxa de Rentabilidade

5.1 Taxa de Desconto : O conceito básico de taxa de desconto a juros simples é muito utilizado em determinadas operações bancárias, tais como desconto de notas promissórias e desconto de duplicatas.

Suponhamos inicialmente as seguintes definições:

Sejam *d* a taxa de desconto em cada período, *P* o principal e *M* o montante e *n* o prazo. Convém então lembrar que a taxa de rentabilidade *i* é aplicada sobre o principal *P*, durante *n* períodos, para gerar o Montante. Por outro lado, a taxa de desconto é aplicada sobre o montante *M*, durante n períodos, para produzir o principal *P*. Assim teremos:

$$P = \frac{M}{1+i.n} = M(1-d.n)$$

Para explicitarmos a taxa de rentabilidade *i* ou a taxa de desconto *d*, obteremos:

$$i = \frac{d}{1-d.n} \qquad \text{ou} \qquad d = \frac{i}{1+i.n}$$

Como o valor principal *P* é menor que o montante *M*, dizemos que ele é obtido do desconto do montante *M*. O desconto utilizado com a taxa de desconto é conhecido como desconto comercial, ou por fora. O desconto realizado com o uso da taxa de rentabilidade i é conhecido como desconto racional, ou por dentro.

Capítulo II – Curvas de Demanda e Oferta

6. Conceitos

Em geral a derivada de uma curva de ***DEMANDA*** é negativa, ou seja, a medida que o preço aumenta, a quantidade demandada diminui e á medida que o preço diminui, a quantidade demandada aumenta. Em alguns casos, essa derivada pode ser nula, e o preço é sempre constante, independente da procura. Outros Determinantes da Demanda além do Preço (Renda, Preferências do Consumidor, Preço de Bens Relacionados (substitutos, complementares etc.)

No caso da ***OFERTA*** a derivada é positiva, ou seja, a medida que o preço aumenta, a quantidade ofertada aumenta e á medida que o preço diminui, a quantidade ofertada diminui. Outros Determinantes da Oferta além do Preço: Tecnologia Custos de Produção (Mão-de-Obra, Capital, Matérias-primas), Número de vendedores, e Expectativas dos produtores.

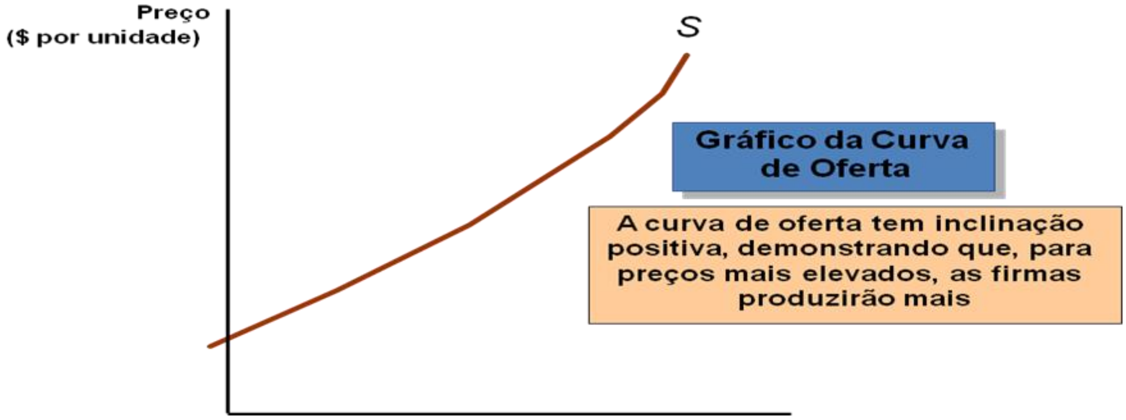


Fig. 6.1 – Curva de Oferta

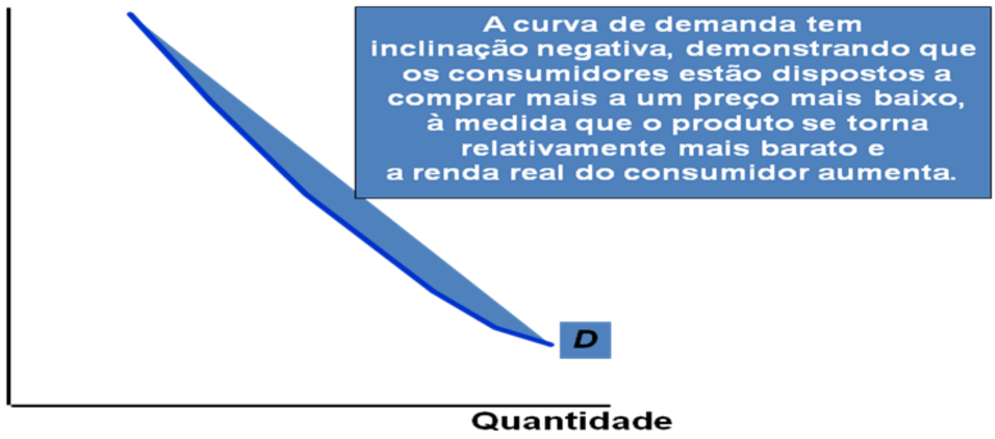


Fig 6.2 – Curva de demanda

7. Demanda e Oferta Lineares

Normalmente algumas curvas de oferta e demanda são aproximadamente lineares na região de preços que interessa, e em outros casos são não lineares. Porém as formulações lineares podem oferecer uma representação razoável dentro de uma faixa de estudo. Aqui faremos uma discussão dos modelos lineares pela facilidade cde interpretação dos conceitos.

7.1. Exemplo:

Foi feita um pesquisa de vendas no supermercado CARREFIVE para o televisor 20" METUSUBICHA. Ao preço de R$ 400,00 são vendidos 400 televisores e ao preço de R$ 500,00 são vendidos 200 televisores.

Se o mesmo supermercado resolve fazer uma promoção desse televisor. Ao preço de R$ 400,00 são oferecidos 200 televisores e ao preço de R$ 500,00 são oferecidos 400 televisores

Para calcularmos a equação da demanda linear basta encontramos a equação liner que passa pelos pontos (400,400) e (200,500) onde

x representa a quantidade demandada e y representa o preço;

Assim sendo $y = mx + b \rightarrow onde\, m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{500-400}{200-400} = -\frac{100}{200} = -\frac{1}{2}$

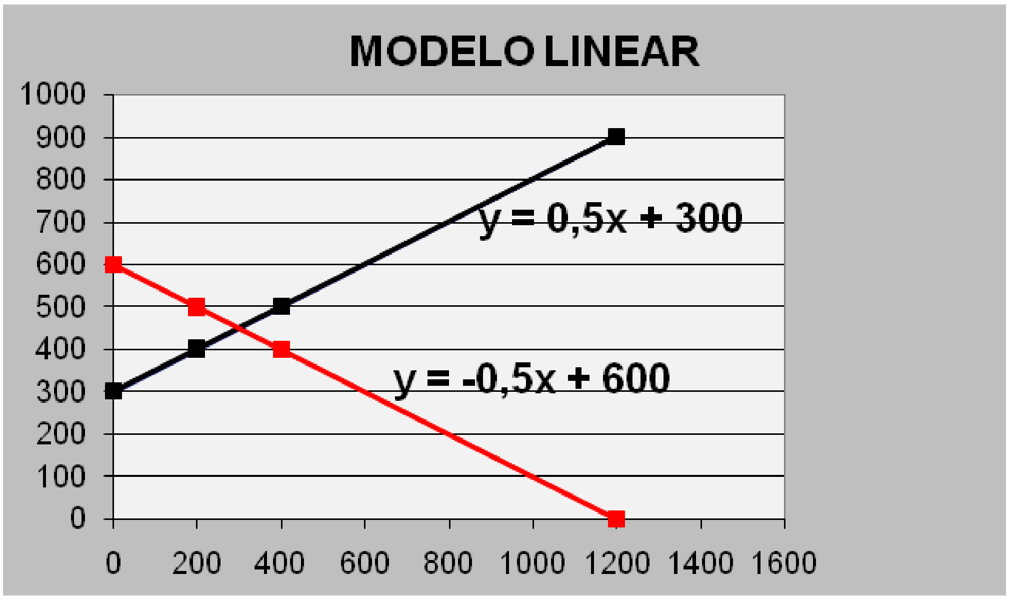
Ou seja, para cada vez que aumentamos em 100,00 o preço da TV a demanda diminui em 200 aparelhos

Como se quando x = y = 400 então $y = -\frac{1}{2}x + 600$ será a equação linear associada.

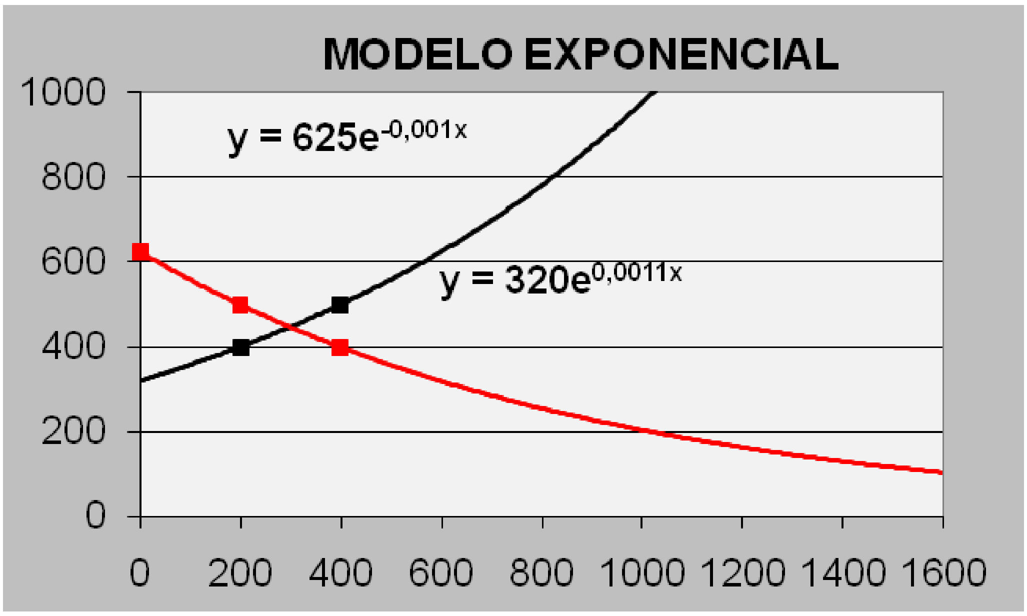
y = 600 representa o menor preço onde o produto não será mais procurado

Analogamente encontramos a equação da oferta linear que passa pelos pontos (500,400) e (400,200) ou seja $y = \frac{1}{2}x + 300$.

y = 300 representa o menor preço onde o produto não será mais oferecido



O modelo exponencial associado é:

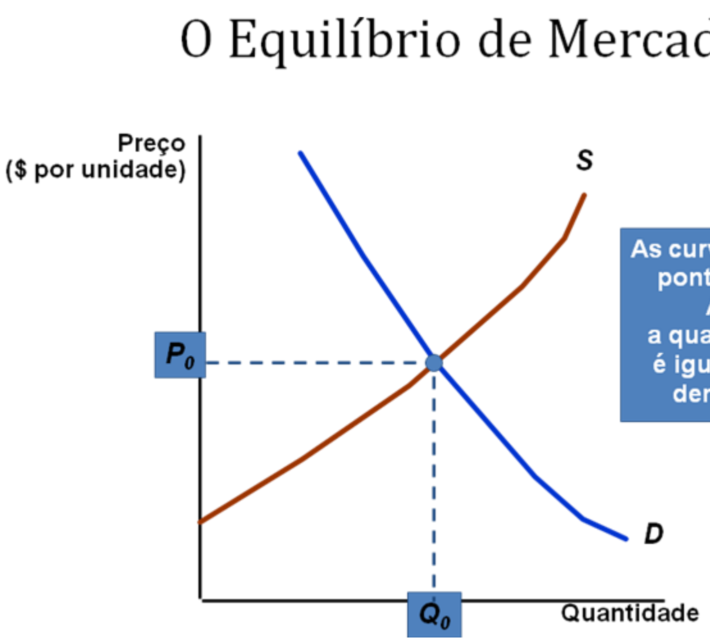


Como faço para encontrar essas equações??

8. Equilíbrio de Mercado

Afirmamos que o equilíbrio de mercado ocorre em um ponto P_0 (preço) no qual a quantidade procurada Q_0 é igual a quantidade ofertada. Na figura abaixo o ponto de equilíbrio é representado pela intersecção entre as curvas *S e D*. As principais características do preço de equilíbrio

- $Q_D = Q_S$;
- Não há escassez de oferta;
- Não há excesso de oferta;
- Não há pressão para que o preço seja alterado.



Algebricamente o ponto de equilíbrio P_E é encontrado resolvendo o sistema formado pelas duas equações:

$$\begin{cases} y = -0,5x + 600 \\ y = 0,5x + 300 \end{cases}$$

Dessa forma a solução para esse sistema é $P_E = (300,450)$, ou seja, para o preço de 450,00 a quantidade demandada é igual a ofertada. Não excesso e nem falta de procura e oferta.

9. Receita Variável

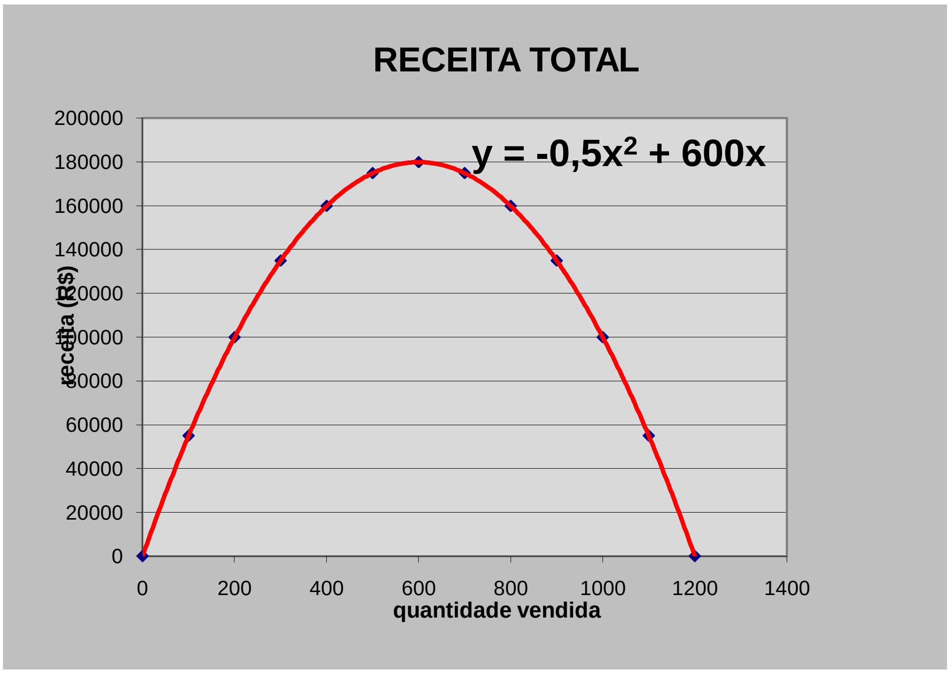
9.1 Conceito**:** Para qualquer função de demanda y = mx + b onde m < 0 pode mos associar a função Receita Total R(x) = x.y = x.(mx+b)

A receita marginal é defina como R`(x) = 2.m.x +b

O ponto de equilíbrio é dado por $x = -\frac{b}{2m}$ e nesse ponto a receita será máxima, ou seja, $R_{MAX} = -b^2/4m$

9.2 Exemplo: No exemplo dado y = -0,5x + 600 temos que x = 600 e R_{MAX} = 180.000, e nesse caso o preço associado é 300,00. Observe que para esse preço não há oferta!!!!!!

Note que no caso do ponto de equilíbrio (300,450) a Receita é de 135.000.



10. Análise do Ponto de Equilíbrio

A análise dos gráficos de ponto de equilíbrio são usualmente utilizados para verificarmos quais são as implicações de uma variação de preço e de uma varaiação de produção.

Seja CT o custo total que pode ser dividido em duas categorias : Fixos e Variáveis

Os custos fixos (CF) permanecem constantes em todos os níveis de produção e normalmente incluem fatores como aluguel, equipamentos, juros etc.

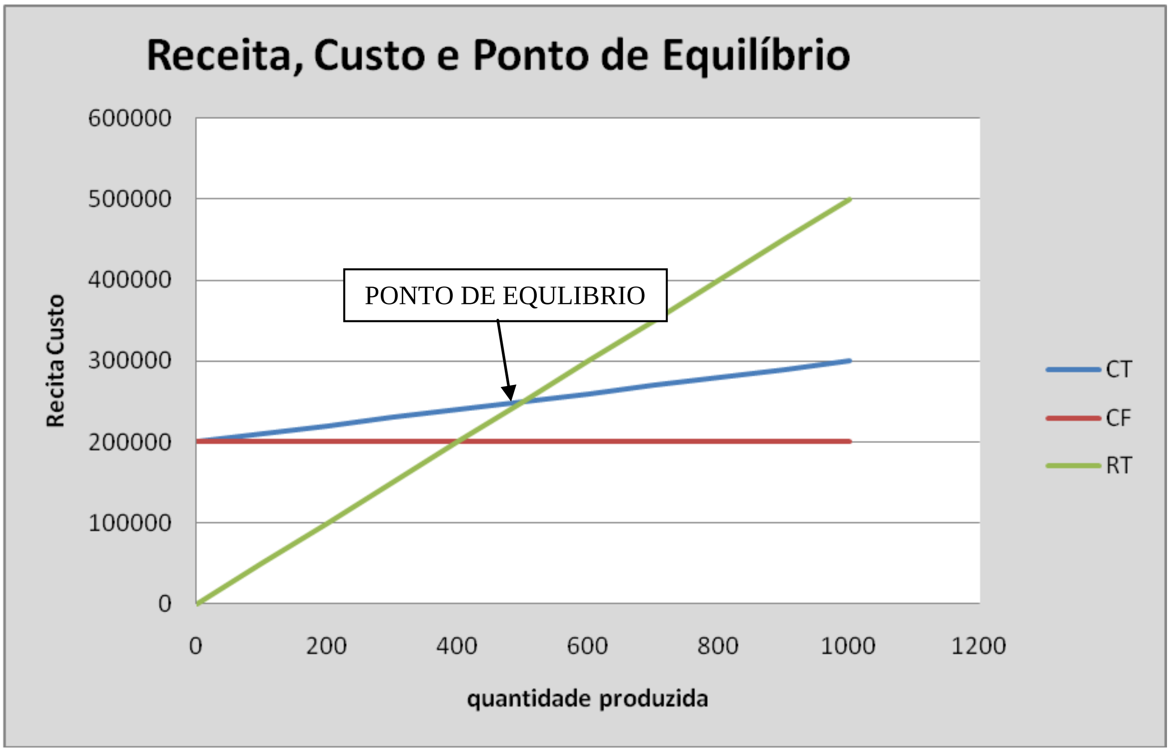
Os custos variáveis (CV) são aqueles que dependem da produção (mão de obra, insumos, campanhas promocionais, etc)

Em qualquer nível de produção **CT = CF + CV**

Na figura abaixo CF é constante e independe da produção, CT é o custo total que quando x = 0, CT = CF, ou seja a intersecção de y com CT é CF.

A reta RT é a receita total que depende da quantidade vendida

A interseção de CT com RT é o ponto de equilíbrio



Esse ponto representa a quantidade na qual o produtor começa a ter lucros (Ou que consegue pagar os custos de produção)

10.1 Exemplo:

Suponhamos agora que o fabricante desse televisor mantenha constante o preço do televisor, vendendo esse modelo a R$ 500,00 por unidade. Então:

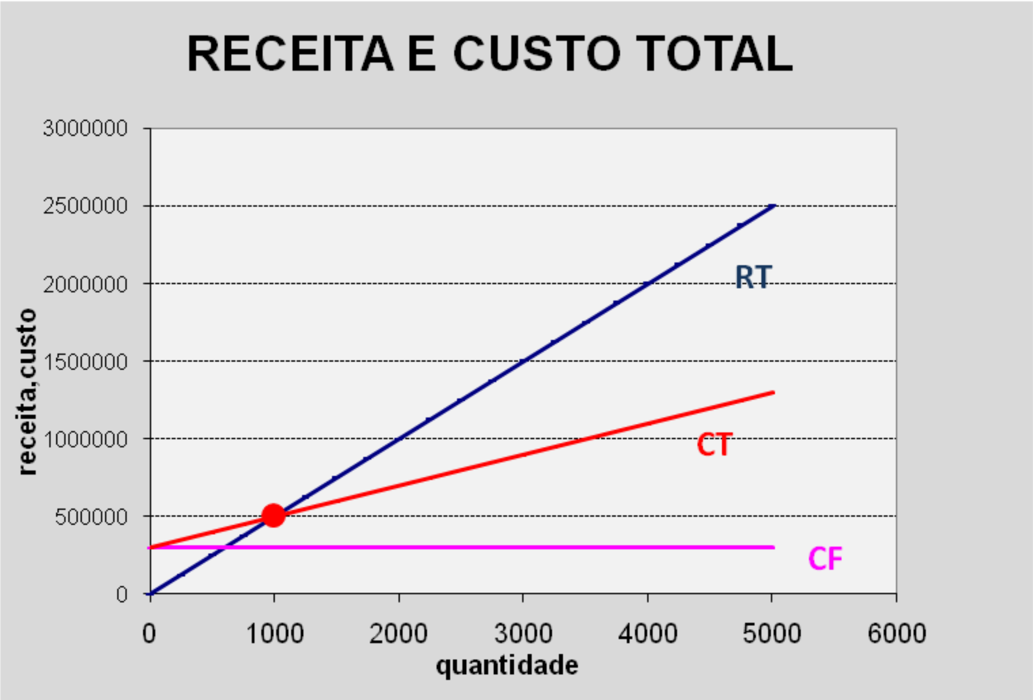
- Qual é a receita total na venda de 5000 televisores ? Qual é a equação da receita total ? Esboce o gráfico;
- Os custos fixos são mantidos constantes em R$ 300.000,00, independentemente do número de unidades do produto em questão. Esboce o gráfico superpondo-o ao do item (a);
- O custo total é igual à soma dos custos variáveis e fixos. Na METESUBICHA, os custos variáveis são estimados em 40% da receita total. Qual é o custo total quando são vendidos 5000 televisores ? Esboce o gráfico superpondo-o ao do item (a);
- Qual é o ponto de equilíbrio ? Indique este ponto no gráfico e resolva para a quantidade correspondente vendida. Localize no gráfico a quantidade com a qual o fabricante cobrirá seus custos fixos.

Seja x a quantidade vendida

RT = 500.x   CF = 300.000 CT = 40%.500x + 300.000 = 200x + 300.000

O equilíbrio acontece quando RT = CT, ou seja, 500.x = 200.x + 300.000 . Dessa maneira x = 1000 e RT = CT = 500.000

A quantidade necessária de vendas para se cobrir o custo fixo é RT = CF então teremos que vender 600 aparelhos



Capítulo III - Valor atual - Reajuste de Salários e Inflação

1. Cálculo do Valor Atual

Assim como os produtos, também os salários são reajustados utilizando a mesma Matemática de juros compostos.

1.1. Reajuste em um único período: Sejam S o Salário ou o preço inicial, e r a taxa de reajuste no período então:

$$S_r = S(1+r)$$

Onde S_r é o valor do salário ou preço reajustado. Para um único período o conceito é o de juros simples.

Exemplo: A partir de 01/05/1992 o s.m. teve um reajuste de 139,49%.

Assim, $S = 96.037,33$ (O salário mínimo anterior)

$r = 1,3949$ (taxa de reajuste)

Então $$S_r = 96.037,33(1+1,3949)$$

$$S_r = 230.000,00$$

1.2. Reajuste com taxas diferentes em cada período: Suponhamos que um produto ou um salário tenha reajustes diferentes em cada período com taxas r_1, r_2, ...r_n respectivamente:

Então : $$S_r = S(1+r_1)(1+r_2)....(1+r_n)$$

Se $r_1 = r_2 = ... = r_n = r$, *logo*

$$S_r = S(1+r)^n$$

2. Taxa de Reajuste Acumulado

Seja r_{acum} a taxa de reajuste acumulado durante todos os períodos, então:

$$S_r = S(1 + r_{acum})$$

Comparando-se com a fórmula anterior

$$r_{acum} = (1 + r_1)(1 + r_2)....(1 + r_n) - 1$$

Exemplo: A gasolina teve os eu preço reajustado em 8% em Janeiro, 10% em Fevereiro e 5% em Março. Então, qual foi o reajuste acumulado nesses três meses?

Nesse caso, $r_1 = 0{,}08$, $r_2 = 0{,}1$ e $r_3 = 0{,}05$
$r_{acum} = (1 + 0{,}08)(1 + 0{,}1)....(1 + 0{,}05) - 1$
$r_{acum} = 0{,}2474 = 24{,}74\%$

3. Inflação

Taxa de um aumento médio no período que sofrem os preços de determinados produtos, escolhidos para formar a chamada "CESTA BÄSICA" e de alguns itens essenciais (Aluguel, transporte, vestuário, etc.)

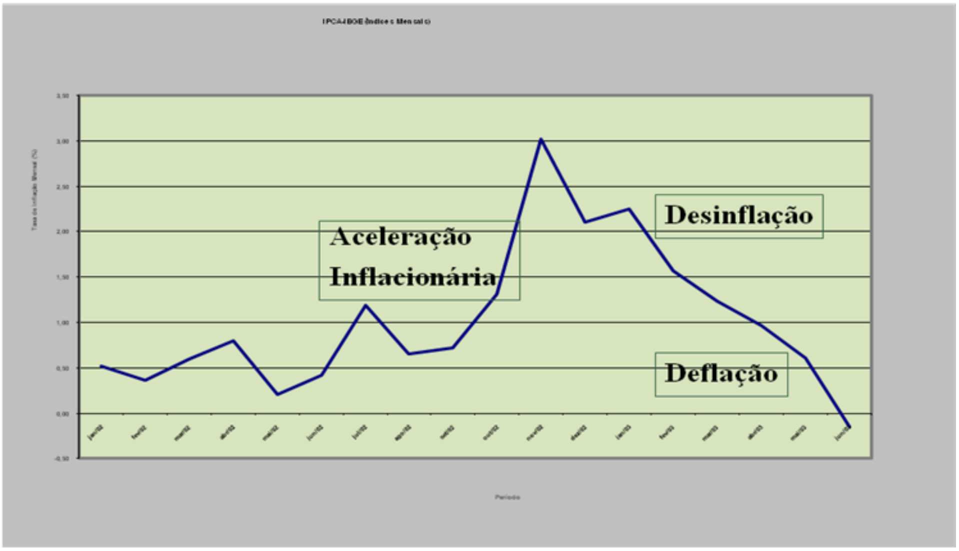
Se a inflação foi de 20% em um determinado período, isto significa que os preços foram reajustados em média de 20% no período. Afirmamos que o CUSTO DE VIDA aumentou em 20%.

Diferenças entre os Índices

Existem vários índices para medirmos o índice de inflação, entre eles, Índices de Preços no Atacado (IPA), Índices de Preços de Varejo (IPC, IPCA) e Índices Gerais de Preços (IGP-m). O que difere nos valores pesquisados é são os seguintes dados:

i) O período no qual os preços são pesquisados e a região;
ii) Os itens que constam da amostra;
iii) O peso de cada item de, definida por meio de uma Pesquisa de Orçamento familiar (POF) e que varia dependendo da época da pesquisa e das classes de renda consideradas;
iv) Faixa Salarial das pessoas pesquisadas.

Evolução Recente do IPCA-IBGE



Variação do IPC-FIPE (%)

Subgrupos	Ponderação	Mensal	Acum. Ano	Acum. 12 meses
Habitação	32,79	0,47	3,23	9,49
Alimentação	22,73	-1,35	4,61	23,03
Transporte	16,03	-0,95	9,73	16,13
Despesas Pessoais	12,30	0,23	5,35	13,93
Saúde	7,08	0,81	5,72	11,90
Vestuário	5,29	1,09	4,50	8,51
Educação	3,78	0,22	9,26	10,45
Geral	100,00	-0,16	5,28	14,20
Fonte: Fundação Instituto de Pesquisas Econômicas (FIPE)				

A inflação acumulada i_{acum} pode ser expressa como:

$$i_{acum} = (1+i_1)(1+i_2)....(1+i_n) - 1$$

onde i_1, i_2......i_n são as taxas de inflação relativas a cada período.

Temos vários indicadores de preços: INPC-IBGE, IPC-FIPE, IGP-M da FGV, ICV do DIEESE etc.

Exemplo: Calcule a inflação acumulada no período de agosto de 2002 a junho de 2003, segundo o IPC da FIPE, sabendo que as taxas foram as seguintes:

IPC - FIPE

período	Taxa (%)
Agosto 2002	1,01
Setembro	0,76
Outubro	1,28
Novembro	2,65
Dezembro	1,83
Janeiro 2003	2,19
Fevereiro	1,61
Março	0,67
Abril	0,57
Maio	0,31
Junho	-0,16

Então

$$i_{acum} = (1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)(1+i_4)...(1+i_{11}) - 1$$

$$i_{acum} = (1+0,0101)(1+0,0076)...(1+(-0,0016)) - 1$$

$$i_{acum} = 0,1344 = 13,44\%$$

Ou seja, segundo a Fipe o custo de vida aumentou em 13,44% durante esse período... enquanto o salário.....

4. Perda ou Ganho Salarial

Se os salários são reajustados com base no índice de inflação no período então

PERDA = GANHO = ZERO !!!!!!!

Se o índice de inflação é maior que o índice de reajuste então existe PERDA...

Se o índice de inflação é menor que o índice de reajuste então existe GANHO....

Exemplo: Qual é a perda salarial de um indivíduo que ganha R$ 1.000,00 e que teve o seu salário reajustado em 20%, enquanto que a inflação no mesmo período foi de 25%?

Como $i = 0,25 > r = 0,2$ então existe PERDA..

$S_r = S\,(1+r) = 1.200$ (Salário Reajustado)

$S_i = S\,(1+i) = 1.250$ (Salário reajustado com base na inflação)

Então $S_r = S_i - PERDA.\, S_i$

$S_r = S_i\,(1 - PERDA)$, logo

$$PERDA = 1 - \frac{s_r}{s_i}$$

Nesse caso, PERDA = 1- 1200/1250 = 0,04 i.é, a perda foi de 4% do poder de compra...

A diferença entre S_i e S_r que é de R$ 50,00 equivale a 4% de 1250,00. Afirmamos que 1200,00 equivale a 96% do salário ganho anteriormente que era de 1000,00, ou seja, 1200,00 equivale a 960,00 em 1000,00.

Assim temos a proporção

$$\frac{960}{1000} = \frac{1200}{1250} = 0,96$$

960,00 é denominado de SALÁRIO REAL, i.é, um salário de 1000,00 que sofre um reajuste de 20% com uma inflação de 25% vale depois de um mes 960,00.!!!!!

Assim $\frac{S_{REAL}}{S} = \frac{S_r}{S_i} \Rightarrow \qquad S_{REAL} = \frac{(1+r)}{(1+i)} S$

Observação: Se r = 0 (quando o salário não é reajustado) , então;

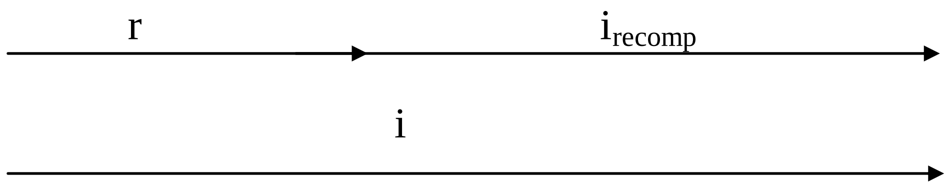
$$S_{REAL} = \frac{S}{(1+i)}$$

Esse quadro abaixo mostra a perda do poder aquisitivo do assalariado!!!

Data	SM Nominal	Salário Real	Inflação (%) (DIEESE)	Perda (%)
01/05/92	230.000,00	230.000,00	-	-
01/06/92	230.000,00	187.895,00	22,35	18,26
01/07/92	230.000,00	154.048,00	22,03	33,02
01/08/92	230.000,00	124.664,00	23,57	45,79

5. Taxa de Recomposição da Perda Salarial

É a taxa que deve ser incorporada ao salário para que o indivíduo recupere o poder de compra. (perda zero).



$$S(1+r)(1+i_{recomp}) = S_i = S(1+i) \Rightarrow$$

$$i_{recomp} = \frac{1+i}{1+r} - 1$$

No caso do indivíduo que teve um reajuste de 20% com uma inflação de 25%, ele deverá ter um reajuste de:

$$i_{recomp} = \frac{1+0,25}{1+0,2} - 1 = 0,0416$$

ou seja 4,16%, pois 20% acumulado com 4,16% é igual a 25%!!!!

6. Depreciação - Desvalorização

É o valor real de um bem desvalorizado pela inflação.

$$V_{REAL} = \frac{V}{(1+i)}$$

onde V = Valor inicial e i = taxa de inflação no período

O valor real de uma cédula de R$ 100,00 desde que a mesma foi lançada no mercado é de R$ 29,49 onde a inflação no período foi de 239,08% (jul 94 a jul.08).

$$V_{REAL} = \frac{100}{(1+2,3908)} = 29,49$$

Comumente os conceitos de depreciação e desconto são confundidos, ou seja, um determinado bem que tenha um valor nominal de R$ 100,00, depois de 20% de inflação em um certo período, calcula-se o valor Real com sendo igual a R$ 80,00 ao invés de R$ 83,33 (Confira!!!)

7. Planos de Pagamentos

Suponhamos que um determinado supermercado na compra de um televisor 14” no valor de R$ 500,00, preço de tabela, oferece aos seus clientes duas formas de pagamentos:

A. Pagamento à vista com 10% de desconto sobre o preço do televisor
B. Pagamento em 30 dias pelo preço de tabela

Então qual é o plano mais vantajoso para o consumidor sabendo que a taxa de rentabilidade i é igual a 8% ao mês?

O problema resume-se a fazer a comparação entre os dois valores envolvidos, ou seja, o que é melhor para o consumidor? Pagar o valor de R$ 450,00 no ato da compra, que corresponde ao valor de tabela com 10% de desconto ou R$ 500,00 daqui a 30 dias. Para compararmos esses valores devemos utilizar a taxa de rentabilidade existente que é de 8% em 30 dias. Note que essa comparação somente poderá ser efetuada no mesmo instante. Sendo assim existem duas possibilidades:

a) Calcular o valor correspondente a R$ 450,00 daqui a 30 dias com uma rentabilidade de 8%;

ou

b) Calcular o valor correspondente a R$ 500,00 no ato da compra.

Utilizando tanto (a) como (b), o plano mais vantajoso para o consumidor é aquele que representa o menor valor. Se indicarmos V_A o valor correspondente ao plano A e V_B o valor correspondente ao plano B, então teremos:

$V_A = 450{,}00 \cdot (1+0{,}08) = 486{,}00 < V_B = 500{,}00$ logo A é mais vantajoso para o consumidor utilizando (a), ou

$V_A = 450{,}00 < V_B = \dfrac{500}{1+0{,}08} = 462{,}96$ utilizando (b).

De uma maneira geral, podemos fazer uma análise dos intervalos onde cada plano é mais vantajoso:

A $\quad V\text{-}dV \longrightarrow$

taxa i

$B \quad \longrightarrow \quad V$

A é mais vantajoso que B se $V(1-d)(1+i)<V$ ou seja $d>\frac{i}{1+i}$, caso contrário B é mais vantajoso que A. Se $d=\frac{i}{1+i}$ os planos são equivalentes.

Capítulo IV - Sistemas de Amortização

1. Sistema Price - Parcelas Iguais

Uma instituição financeira concedeu a um indivíduo um crédito no valor de R$ 20.100,00, para ser pago em 12 parcelas iguais, com vencimento da 1ª parcela em 30 dias e periodicidade mensal de amortização e juros de 2,90% a.m.. Então:

a) Determine o valor da parcela a ser paga mensalmente;

b) Determine o valor de cada parcela de juros paga e o valor a ser amortizado mensalmente;

• ***Prestações Iguais - Sistema Price***

A questão principal envolvida nesse problema é a do pagamento de um crédito concedido pelo Banco no valor de R$ 20.100,00. A taxa cobrada pela instituição era de 2,90% a.m. e o prazo para liquidação total do débito era de 12 meses. A priori, podemos afirmar que nesse período o Banco deveria receber a quantia de R$ 28.325,69 (R$ 20.100,00 pelo principal e R$ 8.325,69 pelos juros). Uma das formas existentes de efetuar tal pagamento é utilizar uma modalidade de financiamento denominada Sistema Price .

O financiamento nesse sistema é pago em prestações iguais, cada uma sendo subdividida em duas parcelas:

a) **juros do período** (calculados sobre o saldo da divida no início do período) e,

b) **amortização do principal** (correspondente ao pagamento parcial ou integral do principal e obtida a partir da diferença do valor da prestação e o valor dos juros no período).

Resumindo, no sistema " Price", para qualquer prestação é valida a relação abaixo:

PRESTAÇÂO = JUROS + AMORTIZAÇÂO

Dessa maneira ao longo do tempo, os juros vão decrescendo ao passo que as amortizações vão crescend $V\,i + A_1 = (V - A_1)\,i + A_2 \Rightarrow A_2 = A_1(1+i)$ o, de tal modo que a soma dessas duas parcelas se mantenha sempre igual ao valor constante da prestação. Sendo assim, o próximo passo é determinar qual o valor da parcela a ser pago mensalmente, de tal maneira, que efetuando esses 12 pagamentos mensais isso seja equivalente ao pagamento integral do montante da divida daqui a 12 meses. Na pratica esse problema se resolve utilizando a ***equação básica de juros compostos*** $\boldsymbol{(1+i)^n}$, para a capitalização do principal e de cada parcela. Logo podemos obter a fórmula matemática para o cálculo do valor da parcela P:

$$P = V(1+i)^n \, i /((1+i)^n -1)$$

Onde V é o valor do principal, i a taxa do período e n número de períodos.

Logo, encontramos o valor para P, que é de R$ 2.007,25. Podemos observar, que por definição, o Sistema Price tem a conceituação de juros compostos ou juros sobre juros. A partir do valor encontrado para a parcela, podemos construir uma tabela denominada tabela Price utilizando as definições impostas ao sistema e descritas nos itens (a) e (b) acima:

SISTEMA PRICE

Parcela	Valor da parcela	Juros	Amortização	Saldo devedor
1ª	2.007,25	582,90	1.424,35	18.675,65
2ª	2.007,25	541,59	1.465,66	17.209,99
3ª	2.007,25	499,09	1.508,16	15.701,83
4ª	2.007,25	455,35	1.551,90	14.149,94
5ª	2.007,25	410,35	1.596,90	12.553,04
6ª	2.007,25	364,04	1.643,21	10.909,82
7ª	2.007,25	316,38	1.690,87	9.218,96
8ª	2.007,25	267,35	1.739,90	7.479,06
9ª	2.007,25	216,89	1.790,36	5.688,70
10ª	2.007,25	164,97	1.842,28	3.846,42
11ª	2.007,25	111,55	1.895,70	1.950,72
12ª	2.007,25	56,57	1.950,72	-

A soma das capitalizações de cada parcela é dada pela expressão:

$$\mathbf{S = 2.007,25\ (1+0,029)^{12} + 2.007,25\ (1+0,029)^{11} + ... + 2.007,25 = 28.325,69}$$

que corresponde ao montante do valor emprestado de R$ 20.100,00 capitalizados mensalmente por um período de 12 meses. Pela tabela acima construída fica difícil de observarmos que o método Price está concebido pela formulação de juros compostos.

• ***Sobre o valor de Amortização***

A partir da relação principal parcela = juros + amortização, podemos escrever que:

$P = J_1 + A_1 = J_2 + A_2 = ...= J_n + A_n$, onde J_n e A_n correspondem respectivamente aos valores de juros pagos e amortizados na n-ésima parcela. Assim sendo podemos escrever

e por recorrência

$$A_n = A_1(1+i)^{n-1}$$

2. Sistema de Amortizações Constantes - SAC

Uma instituição financeira concedeu a um indivíduo um crédito no valor de R$ 18.000,00, para ser pago em 08 parcelas iguais, com vencimento da 1ª parcela em 30 dias e periodicidade mensal de amortização e juros de 1,50% a.m.. Então:

a) Determine o valor da parcela a ser paga mensalmente ;
b) Determine o valor de cada parcela de juros a ser paga e o valor a ser amortizado mensalmente;

• ***Amortizações constantes***

A questão principal envolvida nesse problema é a do pagamento de um crédito concedido pelo Banco no valor de R$ 18.000,00 (sendo oito parcelas no valor de R$ 2.250,00). A taxa cobrada pela instituição era de 1,50% a.m. e o prazo para liquidação total do débito era de 08 meses. A priori, podemos afirmar que nesse período, o Banco deveria receber a quantia de R$ 20.276,86 (R$ 18.000,00 pelo principal e R$ 2.276,86 pelos juros). Uma das formas existentes de efetuar tal pagamento é utilizar uma modalidade de financiamento denominada ***Sistema de Amortização Constante S.A.C.***.

O financiamento nesse sistema é pago em prestações iguais, cada uma sendo subdividida em duas parcelas:

a) **juros do período** (calculados sobre o saldo da divida no início do período) e,
b) **amortização do principal** (sempre constante e calculada a partir do valor principal).

Resumindo, no sistema de Amortização Constante, para qualquer prestação é valida a relação abaixo:

PRESTAÇÂO = JUROS + AMORTIZAÇÂO

Dessa maneira ao longo do tempo, os juros vão decrescendo ao passo que as prestações vão decrescendo aritmeticamente, de tal modo que a soma dessas duas parcelas se mantenha sempre igual ao valor da prestação. Sendo assim, o próximo passo é determinar qual o valor da parcela a ser pago mensalmente, de tal maneira, que efetuando esses 08 pagamentos mensais isso seja equivalente ao pagamento integral do montante da divida daqui a 08 meses. Na pratica esse problema se resolve utilizando a ***equação básica de juros simples***, para o cálculo do juros devido em cada parcela . Logo podemos obter a fórmula matemática para o cálculo do valor da parcela P_k:

$$P_k = \frac{S}{n} + S_{k-1} i$$

Onde S é o valor do principal, S_{k-1} é o valor do saldo devedor no início da cada período, i a taxa do período e n número de períodos.

Logo, encontramos o valor para P_1, que é de R$ 2.520,00. Podemos observar, que por definição, o Sistema SAC tem a conceituação de juros compostos ou juros sobre juros. A partir do valor encontrado para a PARCELA DE AMORTIZAÇÃO, podemos construir uma tabela denominada tabela SAC utilizando as definições impostas ao sistema e descritas nos itens (a) e (b) acima:

Parcela	Valor da parcela	Juros	Amortização	Saldo devedor
1ª	2520,00	270,00	2250	15750
2ª	2486,25	236,25	2250	13500
3ª	2452,50	202,50	2250	11250
4ª	2418,75	168,75	2250	9000
5ª	2385,00	135,00	2250	6750
6ª	2351,25	101,25	2250	4500
7ª	2317,50	67,50	2250	2250
8ª	2283,75	33,75	2250	0

A soma das capitalizações de cada parcela é dada pela expressão:

$$\mathbf{S = 2.520{,}00\ (1+0{,}015)^7 + 2.486{,}25\ (1+0{,}015)^6 + \ldots + 2.283{,}75 = 20.276{,}86}$$

que corresponde ao montante do valor emprestado de R$ 18.000,00 capitalizados mensalmente por um período de 08 meses. Pela tabela acima construída fica difícil de observarmos que o método Price está concebido pela formulação de juros compostos.

• ***Sobre o valor de Amortização***

$A = A_1 = A_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots = A_n$, e então $P_k = A + S_{k-1} \cdot i$

a) Existe uma fórmula de recorrência para P_k ?

b) Mostre que o S.A.C. realmente amortiza ?

c) Estabeleça comparações com o Método Price e SAC.

3. Sistema de Amortizações Geométricas - SAG

Uma instituição financeira concedeu a um indivíduo um crédito no valor de R$ 18.000,00, para ser pago em 08 parcelas iguais, com vencimento da 1ª parcela em 30 dias e periodicidade mensal de amortização e juros de 1,50% a.m.. Então:

a) Determine o valor da parcela a ser paga mensalmente ;

b) Determine o valor de cada parcela de juros a ser paga e o valor a ser amortizado mensalmente;

• ***Prestações Geométricas***

A questão principal envolvida nesse problema é a do pagamento de um crédito concedido pelo Banco no valor de R$ 18.000,00 (sendo oito parcelas no valor de R$ 2.250,00). A taxa cobrada pela instituição era de 1,50% a.m. e o prazo para liquidação total do débito era de 08 meses. A priori, podemos afirmar que nesse período, o Banco deveria receber a quantia de R$ 20.276,86 (R$ 18.000,00 pelo principal e R$ 2.276,86 pelos juros). Uma das formas existentes de efetuar tal pagamento é utilizar uma modalidade de financiamento denominada ***Sistema de Amortização Geométrica*** .

O financiamento nesse sistema é pago em prestações iguais, cada uma sendo subdividida em duas parcelas:

a) **juros do período** (calculados sobre o saldo da divida no início do período) e,
b) **amortização do principal** (correspondente ao pagamento parcial ou integral do principal e obtida a partir da diferença do valor da prestação e o valor dos juros no período).

Resumindo, no sistema de Amortização Geométrica, para qualquer prestação é valida a relação abaixo:

PRESTAÇÂO = JUROS + AMORTIZAÇÂO

Dessa maneira ao longo do tempo, os juros vão decrescendo ao passo que as amortizações vão crescendo, de tal modo que a soma dessas duas parcelas se mantenha sempre igual ao valor constante da prestação. Sendo assim, o próximo passo é determinar qual o valor da parcela a ser pago mensalmente, de tal maneira, que efetuando esses 08 pagamentos mensais isso seja equivalente ao pagamento integral do montante da divida daqui a 08 meses. Na pratica esse problema se resolve utilizando a ***equação básica de juros compostos*** $(1+i)^n$, para a capitalização do principal e de cada parcela. Logo podemos obter a fórmula matemática para o cálculo do valor da parcela P_k:

$$P_k = V_n(1+i)^k$$

Onde V_k é o valor do principal de cada parcela, i a taxa do período e n número de períodos.

Logo, encontramos o valor para P_1, que é de R$ 2.283,75. Podemos observar, que por definição, o Sistema SAG tem a conceituação de juros compostos ou juros sobre juros. A partir do valor encontrado para a parcela, podemos construir uma tabela denominada tabela Price utilizando as definições impostas ao sistema e descritas nos itens (a) e (b) acima:

SAG

Parcela	Valor da parcela	Juros	Amortização	Saldo devedor
1ª	2283,75	270,00	2.013,75	15.986,25
2ª	2318,01	239,79	2.078,21	13.908,04
3ª	2352,78	208,62	2.144,16	11.763,88
4ª	2388,07	176,46	2.211,61	9.552,27
5ª	2423,89	143,28	2.280,60	7.271,67
6ª	2460,25	109,08	2.351,17	4.920,49
7ª	2497,15	73,81	2.423,34	2.497,15
8ª	2534,61	37,46	2.497,15	0,00

A soma das capitalizações de cada parcela é dada pela expressão:

$$\mathbf{S = 2.383,75\ (1+0,015)^7 + 2.318,01\ (1+0,015)^6 + \ldots + 2.534,61 = 20.276,86}$$

que corresponde ao montante do valor emprestado de R$ 18.000,00 capitalizados mensalmente por um período de 08 meses. Pela tabela acima construída fica difícil de observarmos que o método SAG está concebido pela formulação de juros compostos.

• ***Sobre o valor do Saldo Devedor - S_k***

A partir da relação principal parcela = juros + amortização, podemos escrever que:

$P = J_1 + A_1 = J_2 + A_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots = J_n + A_n$, onde J_n e A_n correspondem respectivamente aos valores de juros pagos e amortizados na n-ésima parcela, e que $S_k = S_{k-1} - A_k$. Então

Cálculo do Saldo Devedor para o SAG

$$S_k = P_k\left(n-k\right)$$

Vamos provar esse resultado pelo princípio da Indução Finita:

Para n = 1

$$S_1 = S_0 - A_1 = S_0 - (P_1 - J_1) = S_0 - \left(P_1 - iS_0\right) = S_0\left(1+i\right) - \frac{S_0}{n}\left(1+i\right) = \frac{S_0}{n}\left(1+i\right)\left(n-1\right) = P_1(n-1)$$

Supor válido para n = k - 1 e mostrar que vale para n = k

$$S_k = S_{k-1} - A_k = S_{k-1} - (P_k - J_k) = S_{k-1} - \left(P_k - iS_{k-1}\right) = S_{k-1}\left(1+i\right) - \frac{S_0}{n}\left(1+i\right)^k = P_{k-1}\left(n-\left(k-1\right)\right)\left(1+i\right) - \frac{S_0}{n}$$

A partir dessa fórmula podemos dizer que ***$J_k = iP_{k-1}$ (n – (k-1)***

a) Existe uma fórmula de recorrência para A_k ?

b) Qual o comportamento de A_k ?

c) Mostre que o SAG. realmente amortiza

d) Estabeleça comparações com o Método Price.

4. Sistema de Amortizações Mistas - SAM

Uma instituição financeira concedeu a um indivíduo um crédito no valor de R$ 18.000,00, para ser pago em 08 parcelas iguais, com vencimento da 1[a] parcela em 30 dias e periodicidade mensal de amortização e juros de 1,50% a.m.. Então:

c) Determine o valor da parcela a ser paga mensalmente ;

d) Determine o valor de cada parcela de juros a ser paga e o valor a ser amortizado mensalmente;

• ***Prestações Mistas***

A questão principal envolvida nesse problema é a do pagamento de um crédito concedido pelo Banco no valor de R$ 18.000,00. A taxa cobrada pela instituição era de 1,50% a.m. e o prazo para liquidação total do débito era de 08 meses. A priori, podemos afirmar que nesse período, o Banco deveria receber a quantia de R$ 20.276,86 (R$ 18.000,00 pelo principal e R$ 2.276,86 pelos juros). Uma das formas existentes de efetuar tal pagamento é utilizar uma modalidade de financiamento denominada ***Sistema de Amortização Mista***, que é uma composição dos sistemas Price e Amortizações Constantes .

O financiamento nesse sistema é pago em prestações decrescentes, cada uma sendo subdividida em duas parcelas:

a) **juros do período** (calculados sobre o saldo da divida no início do período) e,
b) **amortização do principal** (correspondente ao pagamento parcial ou integral do principal e obtida a partir da diferença do valor da prestação e o valor dos juros no período).

Resumindo, no sistema de Amortização Mista, para qualquer prestação é valida a relação abaixo:

PRESTAÇÂO = JUROS + AMORTIZAÇÂO

Dessa maneira ao longo do tempo, os juros vão decrescendo ao passo que as amortizações vão crescendo, de tal modo que a soma dessas duas parcelas se mantenha sempre igual ao valor da prestação. Sendo assim, o próximo passo é determinar qual o valor da parcela a ser pago mensalmente, de tal maneira, que efetuando esses 08 pagamentos mensais isso seja equivalente ao pagamento integral do montante da divida daqui a 08 meses. Logo podemos obter a fórmula matemática para o cálculo do valor da parcela P_k:

$$P_k = \frac{P_{price} + P_{sac_k}}{2}$$

Logo, encontramos o valor para P_1, que é de R$ 2.462,26. A partir do valor encontrado para a parcela, podemos construir uma tabela denominada tabela SAM utilizando as definições impostas ao sistema e descritas nos itens (a) e (b) acima:

SISTEMA SAM

Parcela	Valor da parcela	Juros	Amortização	Saldo devedor
1ª	2.462,26	270,00	2.192,26	15.807,75
2ª	2.445,38	237,12	2.208,26	13.599,48
3ª	2.428,51	203,99	2.224,51	11.374,97
4ª	2.411,63	170,62	2.241,01	9.133,96
5ª	2.394,76	137,01	2.257,75	6.876,22
6ª	2.377,88	103,14	2.274,74	4.601,48
7ª	2.361,01	69,02	2.291,98	2.309,50
8ª	2.344,13	34,64	2.309,49	-

A soma das capitalizações de cada parcela é dada pela expressão:

$$\mathbf{S = 2.462{,}26\,(1+0{,}015)^7 + 2.445{,}26\,(1+0{,}015)^6 + \dots + 2.344{,}13 = 20.276{,}86}$$

que corresponde ao montante do valor emprestado de R$ 18.000,00 capitalizados mensalmente por um período de 08 meses.

• ***Sobre o valor de Amortização***

A partir da relação principal parcela = juros + amortização, podemos escrever que:
$C_k = C_1\ (1+i)^k$ e $B_k = B_1 = B_2 = \dots\dots\dots\dots = B_n = V/n$, onde C_k e B_k correspondem respectivamente aos valores amortizados na k-ésima parcela, nos sistemas Price e SAC. Então:

a) Existe uma fórmula de recorrência para A_k , o valor amortizado na k-ésima parcela no SAM?
b) Mostre que o S.A.M. realmente amortiza ?
c) Estabeleça comparações com o Price e SAC
d) A "mistura" entre SAG e SAC é um sistema de Amortização ? De uma maneira geral, dados A e B dois sistemas de amortizações, e se definirmos Um sistema C, onde a parcela de C é a média aritmética das parcelas de A e B. Então C é um sistema de amortização?

5. Sistema Alemão de Amortização

Uma instituição financeira concedeu a um indivíduo um crédito no valor de R$ 12.000,00, para ser pago em 12 parcelas iguais, com vencimento da 1[a] parcela em 30 dias e periodicidade mensal de amortização e juros de 3,0% a.m.. Então:

a) Determine o valor da parcela a ser paga mensalmente ;

b) Determine o valor de cada parcela de juros a ser paga e o valor a ser amortizado mensalmente;

• ***Pagamento de juros antecipados***

Nesse sistema, a parcela de juros em k é antecipada, sendo calculada como $j_k = S_k i$, $k = 1,2,3,...,n$, e os pagamentos são $p_0 = V.i$ e $p_1 = p_2 = ... = p_n = P$, constantes. Ou seja, nesse caso as parcelas são iguais. Então

$p_k = j_k + a_k = S_k i + a_k = j_{k+1} + a_{k+1} = S_{k+1} i + a_{k+1}$ mas como $S_{k+1} = S_k - a_{k+1}$ então

$S_k i + a_k = (S_k - a_{k+1}) i + a_{k+1}$ assim sendo $a_{k+1} = \dfrac{a_k}{1-i}$, ou seja a seqüência na formam uma progressão geométrica de razão $\dfrac{1}{1-i}$.

• ***Sobre o valor da amortização***

Partindo da relação encontrada anteriormente temos:

$$a_1 + a_2 + .. + a_n = a_1 + \frac{a_1}{1-i} + .. + \frac{a_1}{(1-i)^{n-1}} = V$$

Portanto

$$a_1 = \frac{Vi}{(1-i)^{1-n} - (1-i)}$$

Como $p_n = j_n + a_n = S_n i + a_n = P$ *e* $S_n = 0$, tem-se que $P = a_n$ *e* $j_n = 0$.

O financiamento nesse sistema é pago em prestações iguais, cada uma sendo subdividida em duas parcelas:

a) **juros do período** (calculados sobre o saldo da divida no início do período) e,

b) **amortização do principal** (correspondente ao pagamento parcial ou integral do principal e obtida a partir da diferença do valor da prestação e o valor dos juros no período).

Resumindo, no sistema Alemão para qualquer prestação é valida a relação abaixo:

PRESTAÇÃO = JUROS + AMORTIZAÇÂO

Logo, encontramos o valor para a_1, que é de R$ 841,10. A partir do valor encontrado para a primeira amortização, podemos construir uma tabela denominada tabela Alemão utilizando as definições impostas ao sistema e descritas nos itens (a) e (b) acima:

SISTEMA ALEMÃO

Parcela	Juros	Amortização	Pagamento	Saldo devedor
	360,00	-	360,00	12.000,00
1ª	334,77	841,10	1.175,86	11.158,90
2ª	308,75	867,11	1.175,86	10.291,79
3ª	281,94	893,93	1.175,86	9.397,86
4ª	254,29	921,58	1.175,86	8.476,29
5ª	225,79	950,08	1.175,86	7.526,21
6ª	196,40	979,46	1.175,86	6.546,74
7ª	166,11	1.009,76	1.175,86	5.536,99
8ª	134,88	1.040,98	1.175,86	4.496,01
9ª	102,68	1.073,18	1.175,86	3.422,82
10ª	69,49	1.106,37	1.175,86	2.316,45
11ª	35,28	1.140,59	1.175,86	1.175,86
12ª	0,00	1.175,86	1.175,86	0,00

6. Sistema de Amortização Crescente – SACRE

Atualmente utilizado pela Caixa Econômica Federal na concessão de financiamentos para a aquisição de terrenos e da casa própria. Esse tipo de plano de amortização tende a evitar o aparecimento do resíduo final. A dinâmica desse sistema é que o saldo devedor deverá ser refinanciado periodicamente conforme a seguinte regra:

a) A prestação *P* é mantida constante durante no primeiro ano (dois anos em geral)
b) A prestação é recalculada anualmente de acordo com o SAC, com base no Saldo devedor existente.
c) Valores pós-fixados (simulação com a TR de 0,5 % a.m.)

Um certo indivíduo deseja comprar um terreno que custa hoje R$ 10.000,00. Para isso terá que financiá-la pela Caixa Econômica Federal. As condições pra o financiamento são as seguintes:

Sistema de Financiamento: SACRE

Taxa de Juros: 1,0 % a.m.

Correção Monetária : 12% a.a.

Período do Financiamento: 36 meses

a) Elabore uma tabela de amortização para o primeiro financiamento sem correção monetária;

SACRE – SEM CORREÇÃO MONETÁRIA

n	PARCELA	JUROS	AMORTIZAÇÃO	SALDO DEVEDOR
0				10.000,00
1	377,78	100,00	277,78	9.722,22
2	377,78	97,22	280,56	9.441,66
3	377,78	94,42	283,36	9.158,30
4	377,78	91,58	286,20	8.872,10
5	377,78	88,72	289,06	8.583,05
6	377,78	85,83	291,95	8.291,10
7	377,78	82,91	294,87	7.996,23
8	377,78	79,96	297,82	7.698,41
9	377,78	76,98	300,80	7.397,61
10	377,78	73,98	303,80	7.093,81
11	377,78	70,94	306,84	6.786,97
12	377,78	67,87	309,91	6.477,06
13	334,65	64,77	269,88	6.207,18
14	334,65	62,07	272,58	5.934,60
15	334,65	59,35	275,30	5.659,30

16	334,65	56,59	278,06	5.381,24
17	334,65	53,81	280,84	5.100,40
18	334,65	51,00	283,65	4.816,76
19	334,65	48,17	286,48	4.530,27
20	334,65	45,30	289,35	4.240,93
21	334,65	42,41	292,24	3.948,69
22	334,65	39,49	295,16	3.653,52
23	334,65	36,54	298,11	3.355,41
24	334,65	33,55	301,10	3.054,31
25	285,07	30,54	254,53	2.799,79
26	285,07	28,00	257,07	2.542,71
27	285,07	25,43	259,64	2.283,07
28	285,07	22,83	262,24	2.020,83
29	285,07	20,21	264,86	1.755,97
30	285,07	17,56	267,51	1.488,46
31	285,07	14,88	270,19	1.218,27
32	285,07	12,18	272,89	945,39
33	285,07	9,45	275,62	669,77
34	285,07	6,70	278,37	391,40
35	285,07	3,91	281,16	110,24
36	285,07	1,10	283,97	(173,72)

A primeira linha da tabela de amortização é calculada pelo SAC, ou seja,

$A_1 = \frac{10000}{36} = 277,78$ e $J_1 = 10000.0,01 = 100$ e $P_1 = 377,78$. O valor da parcela permanece constante pelo período de 12 meses. No final desse período o valor da parcela é recalculado utilizando a mesma metodologia tomando como base o Saldo devedor depois de 12 meses, ou seja sobre o valor de S_{12} = 6.477,06. Assim P_{13} = 334,65. Analogamente calculamos o valor de P_{25} = 285,07 sobre um Saldo devedor de 3.054,31. Ao final de 36 meses teremos um resíduo de -173,72.

b) Elabore uma tabela de amortização para o primeiro financiamento com correção monetária; (Tente que é fácil!!!!). Qual será o resíduo?

7. Outros Sistemas de Financiamentos

7.1 Pagamento no Final

Nesse caso o financiamento é pago de uma única vez, no final do n-ésimo período. Os juros são capitalizados no final de cada período.

Uma instituição financeira concedeu a um indivíduo um crédito no valor de R$ 10.000,00, para ser pago em 05 parcelas iguais, com pagamento no final do período e juros de 2,0% a.m.. Então:

a) Determine o valor da parcela de juros a ser capitalizada mensalmente;
b) Determine o valor total a ser pago no final.

Parcela	Valor da parcela	Juros	Amortização	Saldo devedor
1ª	0,00	200,00	-200,00	10.200,00
2ª	0,00	204,00	-204,00	10.404,00
3ª	0,00	208,08	- 208,08	10.612,08
4ª	0,00	212,25	- 212,25	10.824,33
5ª	11.040,81	216,48	10.824,33	0,00
Total	11.040,81	1.040,81	10.000,00	

7.2 Pagamento periódico de juros e amortização no final

Parcela	Valor da parcela	Juros	Amortização	Saldo devedor
1ª	200,00	200,00	0,00	10.000,00
2ª	200,00	200,00	0,00	10.000,00
3ª	200,00	200,00	0,00	10.000,00
4ª	200,00	200,00	0,00	10.000,00
5ª	10.200,00	200,00	10.000,00	0,00

Capítulo V - APLICAÇÕES

ATIVIDADE 1 - "OFERTA E DEMANDA"

1) Foi feita uma análise de vendas no supermercado CARREFIVE para o televisor 20 “METUSUBICHA, e concluiu que seus clientes irão comprar 25% a mais de seus televisores se houver um desconto de R$ 100,00 no preço unitário de cada televisor. Quando o preço é de R$ 500,00 são vendidos 4000 televisores. Então

   a) Ache a equação da DEMANDA LINEAR ($y= mx+b$)
   b) Ache a equação da Receita Total
   c) Ache a equação da DEMANDA EXPONENCIAL ($y= a\, e^{bX}$)
   d) A partir de que valor o televisor não será mais vendido nos itens a e c;
   e) Para que preço o valor da receita será máxima?
   f) Faça um esboço do gráfico das funções encontradas.
   g) Faça uma crítica dos modelos encontrados

2) Se o mesmo supermercado resolve fazer uma promoção desse televisor. Ao preço de R$ 500,00 são oferecidos 4000 televisores e ao preço de R$ 300,00 são oferecidos 2000 televisores. Então,

   a) Ache a equação da OFERTA LINEAR
   b) Ache a equação da OFERTA EXPONENCIAL
   c) A partir de que valor o televisor começara a ser oferecido nos itens a e b;
   d) Faça um esboço do gráfico das funções encontradas.
   e) Ache o ponto de equilíbrio de mercado para a oferta/demanda desse televisor.

ATIVIDADE 2 - "CUSTO E RECEITA"

Suponhamos agora que o fabricante desse televisor mantenha constante o preço do televisor, vendendo esse modelo a R$ 500,00 por unidade. Então:

a) Qual é a receita total na venda de 5000 televisores? Qual é a equação da receita total? Esboce o gráfico;
b) Os custos fixos são mantidos constantes em R$ 300.000,00, independentemente do número de unidades do produto em questão. Esboce o gráfico superpondo-o ao do item (a);

c) O custo total é a soma dos custos variáveis e fixos. Na METESUBICHA, os custos variáveis são estimados em 40% da receita total. Qual é o custo total quando são vendidos 5000 televisores? Esboce o gráfico superpondo-o ao do item (a);

d) Qual é o ponto de equilíbrio? Indique este ponto no gráfico e resolva para a quantidade correspondente vendida. Localize no gráfico a quantidade com a qual o fabricante cobrirá seus custos fixos.

ATIVIDADE 3 - ORÇAMENTO DOMÉSTICO

Um pobre indivíduo "trabalhador" conseguia "equilibrar" o seu orçamento doméstico uma renda mensal R. Sabe-se que os seus gastos eram feitos principalmente com aluguel, supermercados, transportes, plano de saúde, vestuário e outros (cerveja, lazer, cinema,....etc.). A distribuição com os gastos no ano passado foi a seguinte:

item	**%**
Aluguel	25
Transporte	20
Supermercado	30
Plano de Saúde	15
Vestuário	5
Outros	5

Assim sendo:

a) Qual será a nova distribuição orçamentária, se os gastos necessários sofreram o seguinte reajuste: aluguel (10%), supermercado (5%), transporte (20%), plano de saúde (10%) e vestuário (15%). Suponha que a sua renda mensal seja a mesma e que aluguel, supermercado , plano de saúde e transporte sejam indispensáveis...

b) E se a sua renda mensal sofrer um reajuste da ordem de 8%, então como ficariam os seus gastos? Considere os dados do item (a).

c) Qual o reajuste mínimo para que possam ser garantidos todos os itens descritos em (a)?:

ATIVIDADE 4 – MENSALIDADES ESCOLARES

O Colégio Subjetivo utiliza 80% das mensalidades escolares para pagar a folha de pagamento dos professores (Receita do colégio é composto pela soma das mensalidades). Então:

a) Sabendo que o colégio pretende reajustar o salário dos professores em 20%, e que de agora em diante ele se vê obrigado a utilizar no máximo 60% de sua receita para a folha de pagamento dos professores, assim qual deveria ser a taxa de reajuste das mensalidades?

b) Qual seria ao reajuste dos professores, se o colégio reajustasse as mensalidades em 50%, e que toda a receita fosse gasta com a folha de pagamento dos professores?

ATIVIDADE 5 - "O PLANO COLLOR"

CÁLCULO DO VALOR DEVIDO EM FUNÇÃO DO PLANO COLLOR - ESTIMATIVA DAS PERDAS OCORRIDAS EM RAZÃO DO BLOQUEIO DOS ATIVOS FINANCEIROS COM O PLANO COLLOR

Antes da Medida Provisória nº 168, de 15 de Março de 1990, convertida pelo Congresso, na íntegra, na Lei nº 8024, de 12 de Abril de 1990 a determinação do valor nominal do indexador oficial - o BTN era feito segundo a variação do IPC do IBGE. Após, tendo o seu valor sido mantido constante ao longo do mês de abril (ou seja, a "inflação oficial" do mês de abril foi mantida como nula) , o valor nominal do BTN passou a ser utilizado segundo a variação do então criado IRVF. Desta maneira somente no mês de abril de 1990, tendo presente que a taxa de variação do IPC foi de 44,80%, segue-se que os credores dos cruzados novos bloqueados tiveram uma perda igual 30,94% do valor bloqueado.

Para melhor visualizar a perda acumulada até o final do bloqueio propriamente dito, causada pela mudança na determinação do valor do BTN, consideremos a tabela abaixo. Nesta que se refere ao caso da Caderneta de Poupança, que recebe juros mensais à taxa de 0,5% a.m incidente sobre os valores dos saldos monetariamente atualizados segundo o valor nominal do BTN (sistemática que era também, aproximadamente, a adotada para a remuneração dos ativos bloqueados) tem-se uma comparação entre o que efetivamente ocorreu no período de 1º de abril de 1990 e 1º de fevereiro de 1991 (período esse da existência do BTN que foi extinta a partir de 1 de fevereiro de 1991, pela Lei nº 8177, de 1º de março de 1991, dando lugar ao novo indexador oficial a TR) , e o que teria ocorrido se houvesse sido mantida a atualização monetária segundo a variação do IPC.

Tabela 1 : Estimativa das perdas da Caderneta de Poupança

taxas mensais de variação (%)

Mês	**IPC**	**IRVF**	**Poupança IPC**	**Poupança IRVF**	**Taxa de recomposição**	**Perda sobre o Valor Bloqueado**
Abr.90	44,80	------	45,52	0,5		
Mai.90	7,87	5,38	8,41	5,9		
Jun.90	9,55	9,61	10,10	10,16		
Jul.90	12,92	10,79	13,48	11,34		
Ago.90	12,03	10,58	12,59	11,13		
Set.90	12,76	12,85	13,32	13,41		
Out.90	14,20	13,71	14,77	14,28		
Nov.90	15,58	16,64	16,16	17,22		
Dez.90	18,30	19,39	18,89	19,99		
Jan.91	19,91	20,21	20,50	20,81		
Acumulado						

Então:

a) Calcule na tabela acima a perda mês a mês e a perda total com o bloqueio dos cruzados;

b) Calcule a taxa de recomposição mês a mês e a taxa de recomposição, de tal maneira que a perda seja nula

ATIVIDADE 6 - CHEQUE ESPECIAL

Um indivíduo abriu em um banco uma conta especial que lhe permite sacar cheques a descoberto até um certo limite . O banco cobra uma taxa de 15% a.m. sobre o saldo devedor do cliente . Admitamos que tal conta no início do mês tinha um saldo de R$ 200,00 e que durante o mês teve o seguinte movimento de sua conta :

DATA	OPERAÇÃO	VALOR
01/08	cheque	600,00
06/08	depósito	500,00
11/08	cheque	600,00
21/08	depósito	500,00
26/08	cheque	1000,00

Então, qual o total de juros devidos ao banco no mês de setembro se:

a) O regime for de juros simples?

b) O regime for de juros compostos?

c) E se fosse cobrada a "famosa" CPMF com alíquota de 0,38% sobre cada movimentação financeira, então qual seria o saldo do cliente no início de setembro ?

ATIVIDADE 7 – "PLANOS DE PAGAMENTOS"

Um certo indivíduo resolveu comprar uma TV Philips 14" e se deparou com os seguintes planos de pagamentos:

Plano A: Pagamento à vista de R$ 320,00

Plano B: Em três prestações iguais e mensais de R$ 130,00 , sendo uma entrada.

Então:

a) Qual foi a taxa financeira usada pela loja ?

b) Qual o plano mais vantajoso se a taxa de poupança é de 6% a.m ?

c) Se fosse usada uma taxa financeira de 12% a.m., então qual seria o valor da prestação ? (Suponha com entrada e sem entrada)

d) Se essa TV fosse financiada em 5 parcelas iguais e sem entrada a uma taxa de 3% a.m., então qual seria o meu saldo devedor após o pagamento da terceira parcela ?

ATIVIDADE 8 - " SAIBA QUANTO PEDIR DE DESCONTO"

Preencha a tabela abaixo , para saber o quanto pedir de desconto, conforme a expectativa de juros mensais:

EXPECTATIVA DE JUROS	DUAS PRESTAÇÕES	TRÊS PRESTAÇÕES	QUATRO PRESTAÇÕES
1%			
2%			
3%			
4%			
5%			
6%			
7%			
8%			
9%			

ATIVIDADE 9 - "CHEQUE PRÉ - DATADO"

Na rede de postos IPIRANGA existem 2 formas de pagamentos para a compra de combustíveis:

Plano A: À vista com um desconto de R$ 0.02 por litro;

Plano B: Cheque pré-datado para 15 dias .

Então:

a) Qual o mais vantajoso, se a taxa de juros para cheque especial é de 12% a.m.?

b) De quanto deverá ser o desconto por litro, para que comprar à vista seja sempre mais vantajoso?

ATIVIDADE 10 - "IMPOSTO DE RENDA"

Um pobre indivíduo assalariado tem descontado na fonte todo mês uma parcela de imposto de renda sobre os seus rendimentos (após deduzidos os descontos previstos com dependentes, previdência, etc..). As alíquotas variam de acordo com o seu rendimento da seguinte maneira:

Rendimentos em mar/09	Alíquota (%)	Parcela a deduzir
Até R$ 1.434,59	Isento	0,00
Acima de R$ 1.434,59 a R$ 2.150,00	7,5	107,59
Acima de R$ 2.150,00 a R$ 2.866,70	15,0	268,84
Acima de R$ 2.866,70 a R$ 3,582,00	22,5	483,84
Acima de R$ 3,582,00	27,5	662,94

Então:

a) Faça um gráfico (imposto a pagar x rendimentos)
b) Encontre e preencha a coluna "PARCELA A DEDUZIR" para que não ocorram injustiças no cálculo....

ATIVIDADE 11 - " O CONSÓRCIO"

Entrar para um grupo de consórcio ,sem dúvida , é uma das únicas maneiras de conseguirmos comprar um carro 0 Km . Suponhamos que eu deseje entrar para grupo de 50 meses para um UNO MILLE FIRE FLEX 2008 que custa hoje R$ 23.480,00. Então:

a) Se eu recebo hoje um salário de R$ 1.000,00 o qual deverá ser reajustado mensalmente em 5% daqui em diante, qual poderá ser o índice máximo de reajuste de maneira que eu não desista de pagar tal consórcio?
b) Se eu estabelecesse uma cota máxima de 50% para pagar esse consórcio,qual seria esse índice de reajuste?

ATIVIDADE 12 - "O SONHO DO POPULAR"

Um FIAT PALIO custa hoje R$ 26.540,00 preço de tabela. Supondo que esse automóvel deverá sofrer um reajuste mensal de 1,5 % a.m. , e que a poupança deverá render 1,0 % a.m. nos próximos dois anos,então:

a) Quanto deverei depositar mensalmente na poupança para que eu consiga comprar esse carro daqui a 2 anos? (O primeiro depósito daqui a 30 dias)
b) Se esse auto fosse reajustado pela taxa de poupança e eu depositasse mensalmente a quantia de R$ 900,00 , em quanto tempo eu conseguiria comprar tal popular?

ATIVIDADE 13 – PRICE PÓS-FIXADO

Um certo indivíduo, para reescalonar uma dívida existente com um Banco fez um empréstimo no valor de R$ 24.056,11, para ser pago em 12 meses, com a cobrança de juros pós-fixados pela TR de 3,00% a.m.

Sistema de Financiamento: Price

Taxa de Juros: 3,0% a.m.

Correção Monetária : TR

Período do Financiamento: 15/05/1995 a 15/05/1996

Data do vencimento da 1ª parcela : 15/06/1995

Então:

a) Calcule o valor da parcela sem correção monetária;
b) Construa a Tabela Price sem Correção Monetária;
c) Construa a Tabela Price com Correção Monetária.

CORREÇÃO MONETÁRIA (TR)

Período	Taxa (%)
15/05/1995 a 15/06/1995	3,336800%
15/06/1995 a 15/07/1995	2,961800%
15/07/1995 a 15/08/1995	2,810000%
15/08/1995 a 15/09/1995	2,349200%
15/09/1995 a 15/10/1995	1,687300%
15/10/1995 a 15/11/1995	1,631000%
15/11/1995 a 15/12/1995	1,578700%
15/12/1995 a 15/01/1996	1,036100%
15/01/1996 a 15/02/1996	1,393000%
15/02/1996 a 15/03/1996	0,769300%
15/03/1996 a 15/04/1996	0,633800%
15/04/1996 a 15/05/1996	0,657800%

Logo após o pagamento da segunda parcela, o individuo tornou-se inadimplente. Em 28/09/1995, a instituição financeira executou judicialmente esse individuo. Então determine o valor devido ao banco, sabendo que:

a) As parcelas vencidas em 15/08, 15/09 estão sujeitas a juros de 1%a.m.;
b) As parcelas vencidas de 15/10/1995 a 15/05/1996 foram consideradas antecipadas para 28/09/1995.

ATIVIDADE 14 - SAG PÓS-FIXADO

Um certo indivíduo, para reescalonar uma dívida existente com um Banco fez um empréstimo no valor de R$ 10,000,00 para ser pago em 06 meses, com a cobrança de juros de 2,0% e encargos pós-fixados pela TR.

Sistema de Financiamento: SAG

Taxa de Juros: 2,0% a.m.

Correção Monetária : TR

Período do Financiamento: 15/09/1995 a 15/05/1996

Data do vencimento da 1ª parcela : 15/10/1995

Então

a) Construa a Tabela de Amortização Geométrica sem Correção Monetária;
b) Construa a Tabela de Amortização Geométrica com Correção Monetária.
c) Calcule o período onde a parcela passa ser maior que o valor da parcela no Sistema Pric

CORREÇÃO MONETÁRIA (TR)

Período	Taxa (%)
15/09/1995 a 15/10/1995	1,687300%
15/10/1995 a 15/11/1995	1,631000%
15/11/1995 a 15/12/1995	1,578700%
15/12/1995 a 15/01/1996	1,036100%
15/01/1996 a 15/02/1996	1,393000%
15/02/1996 a 15/03/1996	0,769300%
15/03/1996 a 15/04/1996	0,633800%
15/04/1996 a 15/05/1996	0,657800%

Sabendo que não chegou a pagar nem a 1ª parcela e que em 30/12/1995, a instituição financeira executou judicialmente esse individuo. Então determine o valor devido ao banco, sabendo que:

a) As parcelas vencidas em 15/10, 15/11 e 15/12 estão sujeitas a juros de 1%a.m.;
b) As parcelas vencidas de 15/12/1995 a 15/05/1996 foram consideradas antecipadas para 30/12/1995.
c) Sobre o montante devido existe uma multa contratual de 10%.

ATIVIDADE 15 - AMORTIZAÇÃO MISTA - SAM

Um certo indivíduo, para reescalonar uma dívida existente com um Banco fez um empréstimo no valor de R$ 10,000,00 para ser pago em 08 meses, com a cobrança de juros de 2,0% e encargos pós-fixados pela TR.

Sistema de Financiamento: SAM

Taxa de Juros: 2,0% a.m.

Correção Monetária: TR

Período do Financiamento: 15/09/1995 a 15/05/1996

Data do vencimento da 1ª parcela: 15/10/1995

Então

a) Construa a Tabela de Amortização Mista sem Correção Monetária;
b) Construa a Tabela de Amortização Mista com Correção Monetária.
c) Calcule o período onde a parcela passa ser menor que o valor da parcela no Sistema Price

CORREÇÃO MONETÁRIA (TR)

Período	Taxa (%)
15/09/1995 a 15/10/1995	1,687300%
15/10/1995 a 15/11/1995	1,631000%
15/11/1995 a 15/12/1995	1,578700%
15/12/1995 a 15/01/1996	1,036100%
15/01/1996 a 15/02/1996	1,393000%
15/02/1996 a 15/03/1996	0,769300%
15/03/1996 a 15/04/1996	0,633800%
15/04/1996 a 15/05/1996	0,657800%

Sabendo que o indivíduo chegou a pagar apenas a 1ª parcela e que em 20/12/1995, a instituição financeira executou judicialmente esse individuo. Então determine o valor devido ao banco, sabendo que:

a) As parcelas vencidas em 15/11 e 15/12 estão sujeitas a juros de 1%a.m. e correção pela TR;
b) As parcelas vencidas de 15/12/1995 a 15/05/1996 foram consideradas antecipadas para 30/12/1995.
c) Sobre o montante devido existe uma multa contratual de 2,0%.
d)

ATIVIDADE 16 – PLANO ZERO

1) Desenvolver uma tabela de planos equivalentes de financiamentos, de acordo com as seguintes condições: principal (R$ 1.000,00), prazo de financiamento (5 meses), taxa de juros (5% a.m.), correção monetária (1,0% a.m.). Considere os planos existentes: PRICE, SAG, SAC e SAM.
2) A Chevrolet está liquidando todos os seus carros com o famoso **plano 0%....**Calcule então o Valor Real de um carro CELTA 1.0 FlexPower 2008, sabendo que o preço do mesmo é de R$ 25.895,00. **O plano 0%** corresponde a uma entrada de 25% do valor à vista do carro e o restante em 12 parcelas iguais e sem juros. Para estabelecer a comparação utilize a taxa financeira de 2,1 % a.m. (CDC do Santander).

ATIVIDADE 17 – PLANO DE AMORTIZAÇÃO ALEMÃO

Um certo indivíduo, para reescalonar uma dívida existente com um Banco fez um empréstimo no valor de R$ 12.000,00 para ser pago em 12 meses, com a cobrança de juros pós-fixados pela TR de 3,00% a.m.

Sistema de Financiamento: ALEMÃO (Juros Antecipados)

Taxa de Juros: 3,0% a.m.

Correção Monetária : TR

Período do Financiamento: 08/06/1995 a 08/06/1996

Data do vencimento da 1ª parcela : 08/07/1995

CORREÇÃO MONETÁRIA (TR)

Período	Taxa (%)
08/06/95 - 08/07/95	2,93400%
08/07/95 - 08/08/95	2,90800%
08/08/95 - 08/09/95	2,22190%
08/09/95 - 08/10/95	1,89120%
08/10/95 - 08/11/95	1,46440%
08/11/95 - 08/12/95	1,58500%
08/12/95 - 08/01/96	1,10240%
08/01/96 - 08/02/96	1,33880%
08/02/96 - 08/03/96	0,85990%
08/03/96 - 08/04/96	0,62490%
08/04/96 - 08/05/96	0,73250%
08/05/96 - 08/06/96	0,68110%

a) Elabore uma tabela de amortização para o primeiro financiamento sem correção monetária;
b) Elabore uma tabela de amortização para o primeiro financiamento com correção monetária;

ATIVIDADE 18 – TERRENO ABANDONADO

Certo indivíduo deseja comprar um terreno que custa hoje R$ 10.000,00. Para isso terá que financiá-la pela Caixa Econômica Federal. As condições pra o financiamento são a seguinte:

Sistema de Financiamento: Price

Taxa de Juros: 1,0 % a.m.

Correção Monetária : 3% a.m.

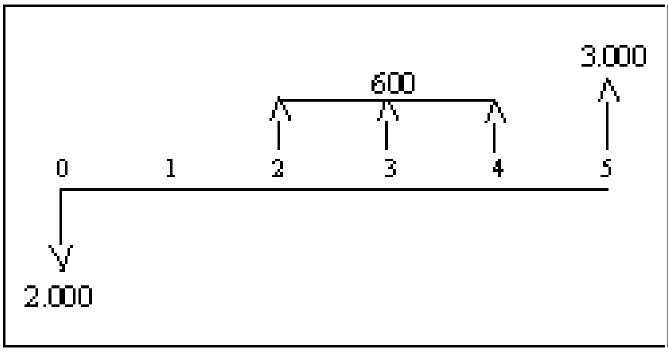
Período do Financiamento: 6 meses

a) Elabore uma tabela de amortização para o primeiro financiamento sem correção monetária;
b) Elabore uma tabela de amortização para o primeiro financiamento com correção monetária;
c) Se o índice de correção for trimestral, então qual será o resíduo. Aplique a correção mês a mês nos juros;
d) Ache uma forma equivalente de maneira que o sistema amortize.
e) Se utilizássemos o Plano SACRE em 36 parcelas, com juros de 1% a.m. e correção de 12% a.a. sobre o saldo devedor, então qual seria o resíduo?

Capítulo VI – ANÁLISE DE INVESTIMENTOS

1. Introdução

Podemos definir o investimento como sendo o ato da aplicação de um determinado recurso em uso que não proporciona satisfação presente, e na expectativa de que esta satisfação ocorra no futuro. Sendo necessário estabelecer métodos de comparação e critérios de decisão que permitam representar cada alternativa por um número e que indiquem a solução mais econômica.



P = quantias de dinheiro na data de hoje (valor presente)

F = quantias isoladas no futuro(valor futuro)

A = série uniforme de pagamentos/recebimentos

2. Transformações entre P, F e A

Entre P e F (depósito presente e rendimento futuro)

$$F = P.(1+i)^n \text{ ou } F = P.(F/P;i;n) \quad \Leftrightarrow \quad P = F\frac{1}{(1+i)^n} \text{ ou } P = F.(P/F;i;n)$$

Entre P e A (pagamento à vista)

$$P = A\frac{(1+i)^n - 1}{i.(1+i)^n} \text{ ou } P = A.(P/A;i;n) \quad \Leftrightarrow \quad A = P\frac{i.(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \text{ ou } A = P.(A/P;i;n)$$

Entre F e A (depósitos programados)

$$F = A\frac{(1+i)^n - 1}{i} \text{ ou } F = A(F/A;i;n) \quad \Leftrightarrow \quad A = F\frac{i}{(1+i)^n - 1} \text{ ou } A = F.(A/F;i;n)$$

3. Taxa Mínima de Atratividade (TMA)

A **TMA** é a taxa a partir do qual o investidor considera que está obtendo ganhos financeiros. É uma taxa associada a um baixo risco que deve render, no mínimo, a taxa de juros equivalente à rentabilidade das aplicações atuais. Logo o novo investimento deverá apenas ser considerado quando a taxa de retorno for maior que a **TMA**.

4. Ferramentas de Análise

4.1 Método do Valor Presente

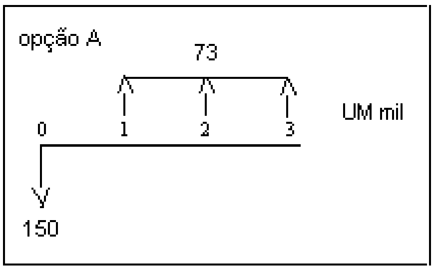
Calculamos o **VP** subtraindo os valores presentes do retorno com os valores presentes dos investimentos. A taxa utilizada é a **TMA**. Escolhe-se aquele investimento que apresenta maior **VP**.

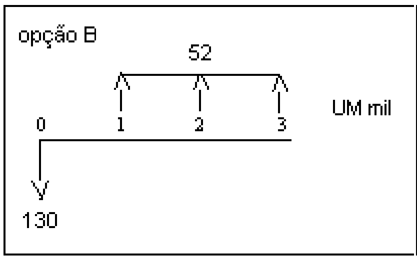
$$VP = \sum_{t=1}^{n} \left[\frac{R}{(1+k)^t} \right] - I$$

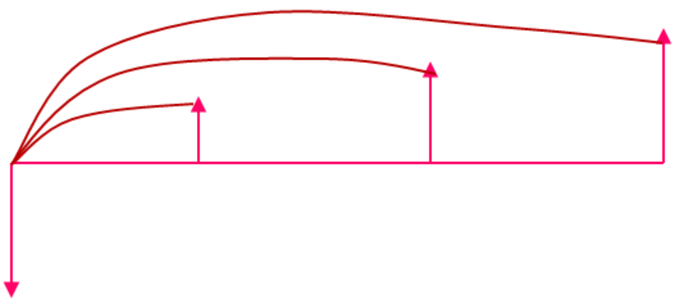
Onde I é valor do investimento, R é o valor do resgate e k e a TMA

No Excel observamos que a função VPL retorna o valor presente dos valores monetários R no momento inicial. Subtraindo-se o valor do investimento I encontramos VP

Exemplo 1: Consideremos que um indivíduo tenha uma quantia de R$ 150.000,00 para fazer um investimento e disponha de dias opções com a TMA = 10%







Aplicando o Método do Valor Presente:

- Alternativa A – aplicar tudo em títulos da opção A

  VP = 73 x (P/A); 10%; 3) – 150 = 31.55

- Alternativa B – aplicar 130.000 em títulos de B

  VP = 52 x (P/A; 10%; 3) – 130 = -0,68

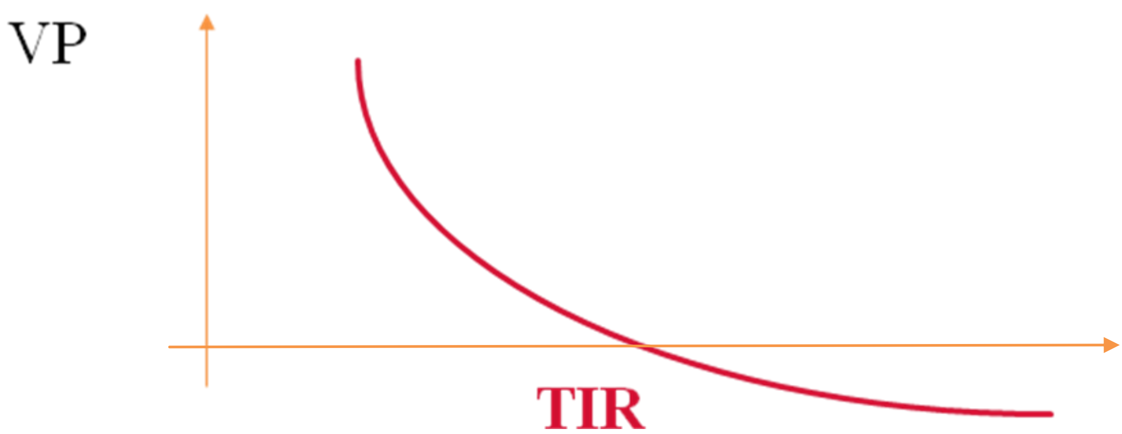
Portanto, a opção A é a mais vantajosa.

4.2 Taxa interna de retorno

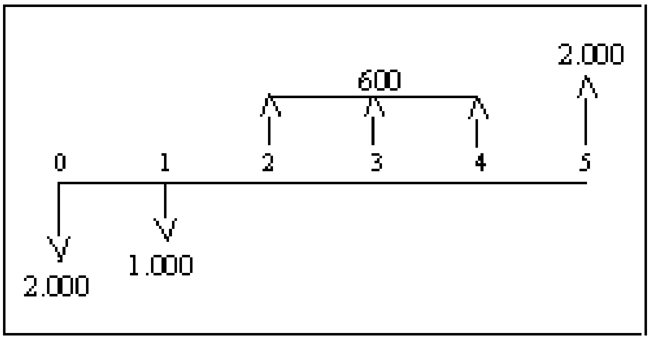
A **TIR** é uma medida da relação entre o montante obtido de investimento e a quantia investida. Além disso, calculamos a taxa (**i**) **TIR** no momento em que o **VP** do fluxo for nulo.

O método mais fácil é escolher arbitrariamente valores para a taxa (**i**), até encontrar um **VP** próximo a zero, cujo valor final encontrado será **TIR**.

$$VP(i) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{R_k}{(1+i)^k} \right] - I$$



Exemplo2: Consideremos o seguinte fluxo de investimento dado pelo diagrama abaixo



Escolhendo arbitrariamente valores para i = 4%, 6% e 7% e encontrando VP teremos:

i = 4% → *VP(4%) = 283,28*

i = 6% → *VP(6%) = 64,09*

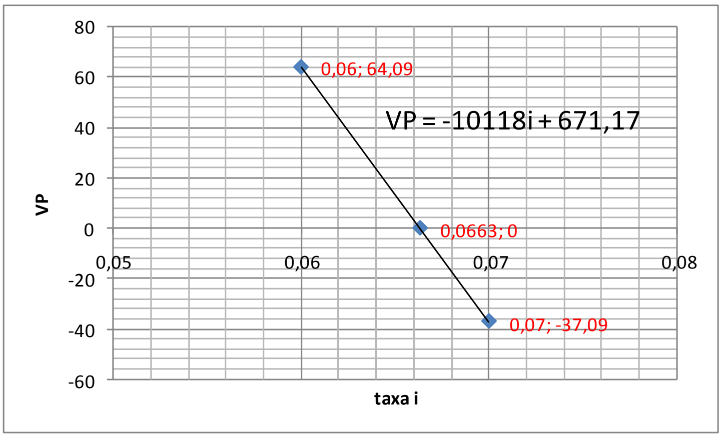
i = 7% → *VP(7%) = - 37,09*

Utilizando interpolação linear encontraremos um valor melhor aproximado:

64,09 + 37,09 = 101,18 → 1%

37,09 → x

Gráfico Linear – VP em função de i



A nova alternativa será: 7 – 0,3666 = 6,6334

Valor arredondado: 6,6% → VP = 2,80

Portanto, podemos considerar uma boa estimativa comparado a resposta exata ser 6,6279.

Utilizando a função TIR do Excel. Essa função retorna a taxa interna de retorno da série dos valores monetários existentes (aplicações e resgates), sem que a taxa de juros é um "chute inicial" que pode ser considerado com 10%. O período da TIR é igual ao período utilizado na sequência de valores, visto que a função TIR não envolve datas.

Por exemplo, no fluxo abaixo temos

=TIR ({-2000,-1000,600,600,600,2000)};10%) = 6,63%

meses	operação	valor
0	aplicação	(2.000,00)
1	aplicação	(1.000,00)
2	resgate	600,00
3	resgate	600,00
4	resgate	600,00
6	resgate	2.000,00
	TIR	6,63%

Comparação da TIR com a TMA

Se a TIR é menor que a TMA afirmamos que o investimento é inviável.

No caso anterior se a TMA > 6,63% então tal investimento seria inviável

Exemplo 3: Dados dos investimentos A e B no valor de R$10,000,00 cada, então melhor será aquele com a maior TIR, desde que a mesma seja maior que a TMA.

INVESTIMENTO A

meses	operação	valor
0	aplicação	(10.000,00)
1	resgate	1.500,00
2	resgate	2.000,00
3	resgate	3.000,00
4	resgate	3.500,00
5	resgate	4.500,00
6	resgate	5.000,00
7	resgate	6.000,00
	TIR	23,4%

INVESTIMENTO B

meses	operação	valor
0	aplicação	(10.000,00)
1	resgate	6.000,00
2	resgate	5.000,00
3	resgate	4.500,00
4	resgate	3.500,00
5	resgate	3.000,00
6	resgate	2.000,00
7	resgate	1.500,00
	TIR	42,2%

Assim sendo como TIR_B > TIR_A podemos afirmar que B é mais vantajoso que A. Ne, sempre podemos fazer tal informação, pois isso depende da TMA que pode ser diferente para cada investimento e do período em questão. Uma variação da TIR para períodos que não são uniformes, e são dados por datas é a XTIR. Essa função retorna o valor da TIR com período de 365 dias cujos valores monetários são dados com as suas respectivas datas de ocorrência. A coluna datas é listada como datas do calendário e não deve ser confundida com a coluna dias corridos DC, isto é, na data inicial que é feito o investimento atribuímos na coluna o valor 1 que corresponde a 0 na coluna dias corridos DC.

NORTH AMERICA				18/12/2003
operação	**vencimento**	**DC**	**datas**	**VALOR**
	18/12/2003	**0**	**1**	**(R$ 55.073,79)**
000010	16/01/04	29	30	R$ 529,89
000004	14/02/04	58	59	R$ 705,67

Podemos observar que nada data inicial de 18/12/2003 (1) o valor DC = 0, e em 16/01/2004 quando foram transcorridos 29 dias na coluna data teremos (30), ou seja, devemos atribuir sempre na coluna datas o valor DC + 1. O chute inicial da data continua em 10%. Na função financeira XTIR o número de valores monetários deve ser igual ao número de datas, e se há na mesma data dois valores diferentes, os mesmos devem ser listados na mesma data com os dois valores existentes. O resultado da XTIR será uma taxa que se refere a 365 dias, e caso queira se conhecer a taxa ao mês, a mesma deverá ser convertida com a relação (1+ $XTIR_{365})^{(30/365)}$.

=XTIR({-27946,20,2949,55......,2949,55;1,15,22,....68}10%)

				24/10/2001	
VENCTO.	**DC**	**DATAS**		**VALOR**	
24/10/2001	0	1		**(R$ 27.946,20)**	
07/11/01	14	15	R$	2.949,55	
14/11/01	21	22	R$	2.949,55	
21/11/01	28	29	R$	2.949,55	
28/11/01	35	36	R$	2.949,55	
05/12/01	42	43	R$	2.949,55	
10/12/01	47	48	R$	2.949,55	
15/12/01	52	53	R$	2.949,55	
02/12/01	39	40	R$	2.949,55	
25/12/01	62	63	R$	2.949,55	
30/12/01	67	68	R$	2.949,55	
			R$	**29.495,50**	
				62,57%	**TIR 365 dias**
				4,075%	**TIR ao mês**

Outro exemplo:

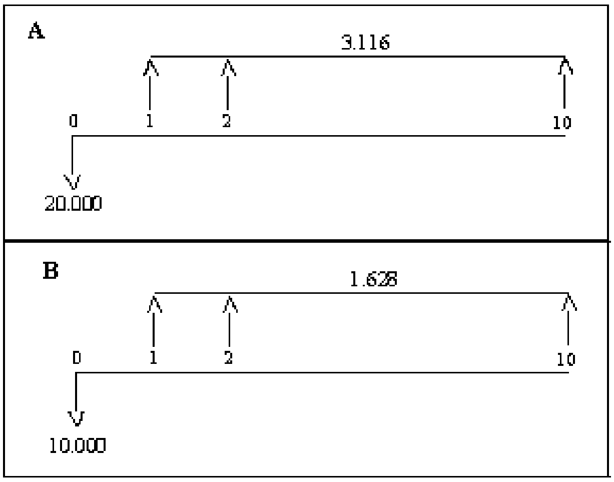
NORTH AMERICA	18/12/2003

operação	vencimento	DC	datas	VALOR
		0	1	**(R$ 55.073,79)**
000010	16/01/04	29	30	R$ 529,89
000004	14/02/04	58	59	R$ 705,67
000008	14/02/04	58	59	R$ 729,96
000011	15/02/04	59	60	R$ 353,28
000014	29/02/04	73	74	R$ 3.252,70
000001	11/03/04	84	85	R$ 14.628,94
000002	11/03/04	84	85	R$ 15.261,17
000005	15/03/04	88	89	R$ 1.074,66
000009	15/03/04	88	89	R$ 593,11
000015	15/03/04	88	89	R$ 2.963,62
000012	16/03/04	89	90	R$ 353,28
000013	16/03/04	89	90	R$ 797,58
000003	25/03/04	98	99	R$ 14.555,55
000006	30/03/04	103	104	R$ 1.828,95
000016	30/03/04	103	104	R$ 2.963,62
000007	14/04/04	118	119	R$ 1.828,95
TOTAL				**R$ 62.420,93**
			365 dias	67,88%
			mês	4,350%

4.3 Investimento Incremental

Os investimentos com a **TIR** maior que as **TMA** são considerados rentáveis e são passíveis de análise; Sendo B = A + (B–A), então B será a melhor opção somente quando A e (B-A) forem maiores que a **TMA**;

$\mathbf{TIR_A} > \mathbf{TIR_B}$ não quer dizer que o investimento A é preferido a B;
O investimento (B-A) é chamado de investimento incremental.
Exemplo 4: Consideremos dois investimentos A e B com os seguintes fluxos:



Vamos calcular a TIR anulando os valores presentes considerando TMA = 6%:
$-20.000 + 3.116(P/A;i_A;10) = 0 \rightarrow i_A= 9\%$
$-10.000 + 1.628(P/A;i_B;10) = 0 \rightarrow i_B= 10\%$
Como ($i_B > i_A$) e A = B + (A - B) utilizamos (A - B) como sendo o investimento incremental.
Calculando VPA e VPB na TMA = 6%
Temos VPA = 2.934,03e VPB = 1.982,22 e a diferença VPA –VPB é de 951,81. Portando dessa maneira devemos calcular qual deverá ser o investimento A-B no valor de R$ 10.000,00 para que se tenha a 6% o valor de 10.951,81. Ou seja, teremos que calcular R = (6%,10,-10951,0) e assim sendo R = 1.487,89 (R é o PGTO do Price). Logo o investimento A –B é dado pelo fluxo:

INVESTIMENTO A-B

meses	operação	valor
0	aplicação	(10.000,00)
1	resgate	1.487,89
2	resgate	1.487,89
3	resgate	1.487,89
4	resgate	1.487,89
5	resgate	1.487,89
6	resgate	1.487,89
7	resgate	1.487,89
8	resgate	1.487,89
9	resgate	1.487,89
10	resgate	1.487,89

Que corresponde a uma TIR de 8,0%. Se a empresa optasse por B ela teria que encontrar um investimento incremental A – B no valor de R$10.000,00 que rendesse no mínimo 8%.

	Ano	A	B	A - B
Investimento Inicial	0	-20.000	-10.000	-10.000
Economia Anual	1 a 10	3.116	1.628	1.488
TIR		9%	10%	8%