RESUMO – CONCEITOS BÁSICOS DE PROBABILIDADES

Experiência aleatória: é um processo ou prova conducente a pelo menos dois possíveis resultados associado a incerteza com a qual ocorrerá.

Exemplos de uma experiência aleatória:

- Lançamento de uma moeda e observação do lado que fica para cima;
- Lançamento de um dado e observação do número de pontos obtidos;
- Extracção de uma carta de um baralho e anotação do naipe;
- Registo do número de sinistros por apólice do ramo automóvel durante uma anuidade;
- Observação do partido vencedor das próximas eleições legislativas;
- Registo do número de equipas de futebol vencedores em casa na proxima jornada do Moçambola;
- Etc.

Características de uma experiência aleatória:

- Não se pode dizer à partida qual o resultado (fenómeno aleatório) da experiência a realizar, mas pode descrever-se o conjunto de todos os resultados possíveis;
- A existência da regularidade quando a experiência é repetida muitas vezes;
- A possibilidade de repetição da experiência em condições similares;

***Espaço de resultados, representado por* Ω**: é o conjunto (não vazio) formado por todos os resultados que hipotéticamente é possivel obter de uma determinada experiência aleatória.

Exemplo : No lançamento de um dado, os resultados básicos são os números 1, 2, 3, 4, 5, 6. Assim, o espaço de resultados é: $\Omega = [1, 2, 3, 4, 5, 6]$

Acontecimento ou evento: é um subconjunto do espaço de resultados. É algo que a experiência aleatória pode produzir mas não se realiza necessariamente;

Exemplo : Consideremos a possibilidade de saída de um número par no lançamento de um dado:

Experimento ou Experiência aleatória: Lançamento de um dado
Espaço de resultados: 1, 2, 3, 4, 5 e 6
Acontecimento: 2, 4, 6

Acontecimentos mutuamente exclusivos: são aquele que não podem ocorrer simultaneamente. Caso contrário, eles não são mutuamente exclusivos.

Acontecimentos igualmente possíveis: se existe razão para conjenturar que nenhum deles é mais provável do que o outro;

Medidas de probabilidade

A abordagem clássica de probabilidade: descreve a probabilidade em termos da proporção de vezes em que um acontecimento pode teoricamente esperar-se que ocorra.

$$P = P(A) = \frac{m}{n} = \frac{Numero\ \ resultados\ \ possiveis\ \ favoráveis\ \ ao\ \ acontecimento}{Número\ \ total\ \ de\ \ resultados\ \ possiveis}$$

Abordagem frequentista de probabilidade*:* expressa a proporção de vezes que a ocorrência de um acontecimento é observada num grande número de provas.

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{n_A}{n} = \frac{Numero\ \ provas\ \ nas\ \ quais\ \ acontecimento\ \ ocorre}{Número\ \ total\ \ de\ \ provas}$$

A abordagem subjectiva de probabilidade: representa o grau em que alguém acredita que o acontecimento ocorra. Tais probabilidades podem ser também descritas como palpites ou suposições.

Propriedades da Medida de probabilidade

1. $P(A) = 1 - P(\overline{A})$
2. $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$
3. $P(B \cup A) = P(B) + P(B) - P(A \cap B)$
4. $0 \leq P(A) \leq 1$

Exemplo**:** Em determinada população, 9.8% das pessoas adquirem a revista A, 22.9% a revista B, e 5.1% ambas revistas. Admite-se que a medida de probabilidade é a proporção dos indivíduos da população que adquirem as revistas.

Definamos os seguintes acontecimentos:

A = Acontecimento que consiste em adquirir a revista A
B = Acontecimento que consiste em adquiri a revista B.

a) A probabilidade de adquirir somente a revista A, é dada pela propriedade 2.
   $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0.098 - 0.051 = 0.047$
b) A probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso adquiri pelo menos uma das revistas é dada pela propriedade 3.
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.098 + 0.229 - 0.051 = 0.276$

c) A probabilidade de não adquiri nem a revista A, nem a revista B, é dada pela propriedade 1:
   $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.276 = 0.724$

Tabelas de Contingências

As *Tabelas de contingencia*s mostram simultaneamente as frequencias absolutas ou relativas de duas variaveis.

Conceitos basicos nas Tabelas de Contingencia

Acomntecimentos Mutuamente Exclusivos;

Dois ou mais acontecimentos dizem-se mutuamente exclusivos se não podem ocorrer em simultâneo;

Acontecimentos Exaustivos

Um conjunto de acontecimentos dizem-se esaustivos se incluem todos os resultados possiveis da experiencia aleatória;

Intersecção de Acontecimentos

Dois ou mais acontecimentos podem ocorrer ao mesmo tempo. Uma intersecção deste tipo pode ser representado por “A e B” ou “A e B e C” dependendo dos acontecimentos possiveis nele envolvidos;

União de Acontecimentos

Pelo menos um dos acontecimentos possiveis ocorre. A uniao é representada por “A ou B” ou (A ou B ou C” dependendo do numero de acontecimentos;

Exemplo de uma Tabela de Contingência

Tabela de Contingencias de Frequencias Absolutas e Relativas

(1) Frequencias

			Idade B < 15	Idade $\overline{B}$ 15 ou +	
Sexo	A	Masculino	3,477	5,436	8,913
	$\overline{A}$	Feminino	1,249	1,287	2,536
			4,726	6,723	11,449

(2) Frequencias Relativas

			Idade B < 15	Idade $\overline{B}$ 15 ou +	
Sexo	A	Masculino	0.304	0.475	0.778
	$\overline{A}$	Feminino	0.109	0.112	0.222
			0.413	0.587	1.000

A parte (1) mostra que cerca de 3 477 dos feridos eram do sexo masculino com idade inferior a 15 anos. A frequencia relativa de pessoas nesta categoria de sexo/idade é 3477/11449, ou 0.304, tal como se mostra na Tabela de Contingencia na parte (2).

Referindo-nos às frequencias na parte (1) da Tabela, podemos identificar varios termos definidos anteriormente:

Acontecimentos mutuamente exclusivos: as vitimas eram ou do sexo masculino (acontecimento A, 8913 pessoas) ou do sexo feminino (acontecimento $\overline{A}$, 2536 pessoas);

Intersecção de acontecimentos: Existiam 3477 vitimas que eram simultaneamente do sexo masculino e abaixo dos 15 anos, categorias $(A \quad e \quad B)$;

Uniao de acontecimentos: Existiam 10162 vitimas que eram ou do sexo masculino ou abaixo dos 15 anos ou ambos, a categoria $(A \quad ou \quad B)$. Esta categoris inclui todos excepto vitimas do sexo feminino de 15 anos e mais e calcula-se como 5436 + 3477 + 1249 = 10162; Ou 8913+4726-3477=10162;

Regras de probabilidades

Regra de Adição de Probabilidade

Descreve a probabilidade de ocorrência de pelo menos um acontecimento, por exemplo, P(AouB).

- Se os acontecimentos são mutuamente exclusivos, esta probabilidade será a soma das suas probabilidades individuais:

$$P(A_1 \quad ou \quad A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

Exemplo : Se definirmos A_1 como sendo o acontecimento "saída de um 6 no lançamento de um dado" e A_2 o acontecimento "saída de um número impar", então $P(A_1) = 1/6$ e $P(A_2) = 3/6 = ½$. A probabilidade de sair um 6 ou um número impar num único lançamento é:

$$P(A_1 \quad ou \quad A_2) = P(A_1) + P(A_2) = 1/6 + 1/2 = 2/3$$

- Quando os acontecimentos não são mutuamente exclusivos, aplica-se a regra geral de adição de probabilidades. Esta regra toma em conta que dois ou mais acontecimentos poderão ocorrer simultaneamente.

$$P(A_1 \quad ou \quad A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

Exemplo : Se A_1 é o acontecimento que consiste na extracção de um "As" de um baralho de cartas" e A_2 a extracção de um "Espada", então $P(A_1) = 4/52 = 1/13$ e $P(A_2) = 13/52 = 1/4$. A probabilidade de se extrair um "As" ou um "Espada" em uma única extracção é:

$$P(A_1 + A_2) = 4/52 + 13/52 - 1/52 = 16/52$$

Regra de multiplicação de probabilidades

Descreve a probabilidade conjunta de ocorrência de dois ou mais acontecimentos, por exemplo, P(A e B).

Estas regras envolvem vários termos importantes:

Probabilidade Marginal: a probabilidade de ocorrência de um dado acontecimento. Nenhuns outros acontecimentos são tomados em consideração. Uma expressão típica é P(A).

Probabilidade Conjunta: a probabilidade de ocorrência de dois ou mais acontecimentos. Uma expressão típica é PA e B)
Probabilidade Condicional: a probabilidade de ocorrência de um acontecimento, dado que um outro acontecimento já ocorreu ou já teve lugar. Uma expressão típica é P(A/B) com a descrição verbal de "probabilidade de A dado B". A probabilidade condicional pode ser determinada da seguinte forma:

Probabilidade Condicional do acontecimento A, dado que B já ocorreu:

$$P(A|B) = \frac{P(A \quad e \quad B)}{P(B)} \qquad \text{(para toda P(B)>0)}$$

As regras resultantes são chamadas de ***Regras de Multiplicação***. Elas determinam a probabilidade de ocorrência simultânea de ambos acontecimentos, sejam eles, dois, três ou mais.

Existem duas regras de multiplicação e a aplicação de cada uma delas depende de se os acontecimentos são *dependentes* ou *independentes*.

Acontecimentos independentes: dois ou mais acontecimentos são independentes se a ocorrência de um não afecta a probabilidade de ocorrência do outro.

Acontecimentos dependentes: Os acontecimentos são dependentes se a ocorrência de um afecta a probabilidade de ocorrência dos demais.

- Se os acontecimentos são *independentes*, esta probabilidade é o produto das suas probabilidades marginais individuais.

  P(A e B) = P(A) x P(B)

Exemplo: Uma caixa contém 3 bolas brancas e 2 pretas. Seja A_1 o acontecimento "primeira bola extraída 'e preta" e A_2 o acontecimento "a segunda bola extraída é preta". Qual é a probabilidade de saírem duas bolas pretas em duas extracções?

Se considerarmos uma extracção ***com reposição***, os acontecimentos A_1 e A_2 são independentes e então $P(A_1) = 2/(3+2) = 2/5$ e $P(A_2) = 2/(3+2) = 2/5$. E, por conseguinte, a probabilidade de as duas bolas serem pretas nas duas extracções é dada por:

$$P(A_1 \quad e \quad A_2) = P(A_1)P(A_2) = 2/5 * 2/5 = 4/25$$

- Se os acontecimentos não são independentes, aplica-se a regra geral de multiplicação de probabilidades. Esta regra considera a probabilidade condicional de ocorrência de um acontecimento, dado que um outro já ocorreu.

  P(A e B) = P(A) x $P(B|A)$

Se considerarmos uma extracção ***sem reposição***, os acontecimentos A_1 e A_2 são dependentes e então $P(A_1) = 2/(3+2) = 2/5$ e $P(A_2|A_1) = 1/(3+1).=1/4$. E, por conseguinte, a probabilidade de as duas bolas serem pretas nas duas extracções é dada por:

$$P(A_1 \quad e \quad A_2) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1) = 2/5 * 1/4 = 1/10$$

Probabilidade Total e Formula de Bayes

Partiçao do Espaço de resultados

Diz-se que os eventos A1 A2, ...An definem uma partição S, quando se verificam simultaneamente as seguintes condições:

a) Formam grupo completo, isto é, a união de todos os eventos é o próprio espaço de resultados;
b) Os eventos são mutuamente exclusivos dois a dois, isto é A_iA_j $i \neq j$, e i,j = 1, 2, ...n
c) Todos os eventos têm probabilidade não nula, isto é, $P(A_j)>0$

Probabilidade Total

Se os eventos A_1, A_2, ..., A_n definem uma petição sobre Ω, então para qualquer eventos B definido em Ω tem-se:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid A_i).P(A_i)$$

$$= P(A \mid A_1)xP(A_1) + P(A \mid A_2)xP(A_2) + ... + P(A \mid A_n)xP(A_n)$$

Exemplo: Uma fábrica de cachimbos utiliza 3 máquinas de acabamento (1, 2 e 3) com volume diário de produção, respectivamente, de 600, 800 e 1100. De acordo com a experiência anterior sabe-se que a percentagem de cachimbos defeituosos originados por cada máquina é, respectivamente, de 0.05, 0.08 e 0.01. Um cachimbo foi seleccionado ao acaso.

a) Calcule a probabilidade deste ser defeituoso.

Do exemplo anterior, podemos definir os seguintes acontecimentos:

Seja A_1 = o acontecimento que consiste em o cachimbo seleccionado provenha da máquina 1 com probabilidade $P(A_1) = \frac{600}{2500} = 0.24$

Seja A_2 = o acontecimento que consiste em o cachimbo seleccionado provenha da máquina 2 com probabilidade $P(A_2) = \frac{800}{2500} = 0.32$

Seja A_3 = o acontecimento que consiste em o cachimbo seleccionado provenha da máquina 3 com probabilidade $P(A_3) = \frac{1100}{2500} = 0.44$

Seja A o acontecimento que consiste em ser defeituoso o cachimbo seleccionado com probabilidades:

$P(A/A_1) = 0.05$ se vier da máquina 1.

$P(A/A_2) = 0.08$ se vier da máquina 2; e

$P(A/A_3) = 0.01$ se vier da máquina 3;

Verifiquemos primeiro se A_1, A_2, A_3 definem uma partição Ω visto que

a) Apenas as maquinas 1, 2 e 3 produzem cachimbos, isto é a união de todos os eventos é o próprio espaço de resultados;
b) Um cachimbo que é produzido numa máquina não é produzido noutra, isto é, os eventos são mutuamente exclusivos dois a dois;
c) Qualquer uma das maquinas produz cachimbos, pelo que $P(A_i) > 0$, i = 1, 2, 3.

Substituindo na fórmula de probabilidade Total, teremos:

$$P(A) = 0.24 * 0.05 + 0.32 * 0.08 + 0.44 * 0.01 = 0.042$$

Fórmula de Bayes

É uma extensão do conceito de probabilidade condicional e emprega-se para reavaliar as probabilidade dos acontecimentos A_j de uma partição $[A_1, A_2, \ldots, A_m]$ quando se obtém a informação adicional de que um dado acontecimento B se realizou e se conhece $P(B/A_j)$.

Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ definem uma partição sobre Ω, então, para B definido em Ω com P(A)>0:

$$P(A_j \mid A) = \frac{P(A_j).P(A \mid A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i.xP(A \mid A_i)} \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

Exemplo: Uma companhia seguradora distribui os segurados por três classes, A_1, A_2 e A_3, consoante o menor ou maior risco que lhes atribui; em certo momento, a carteira de apólices é tal que $P(A_1)=0.35$, $P(A_2)=0.50$ e $P(A_3)=0.15$. Sabe-se também que a probabilidade de os segurados de cada classe terem um ou mais acidentes durante um ano é, respectivamente, 0.01, 0.04 e 0.15. A companhia, naturalmente, nunca tem a certeza de conhecer a classe a que pertence o subscritor de uma apólice.
Se um segurado tiver um ou mais acidentes durante um ano, que conclusões podem retirar-se quanto à classe a que pertence?

Se B designar o acontecimento "um ou mais acidentes durante um ano", então:

$$P(B/A_1) = 0.01 \qquad P(B/A_2) = 0.04 \qquad P(B/A_3) = 0.15$$

Pretende-se calcular $P(A_1/B)$ $\quad P(A_2/B)$ $\quad P(A_3/B)$

Solução: $P(A_2 \mid A) = \dfrac{0.32 * 0.08}{0.24 * 0.05 + 0.32 * 0.08 + 0.44 * 0.01} = \dfrac{0.0256}{0.0420} = 0.6095$

Construindo um quadro,

A_i	$P(A_j)$	$P(B\mid A_j)$	$P(A_j).P(B\mid A_j)$	$P(A_j\mid B)$
A_1	0.35	0.01	0.0035	0.0761
A_2	0.50	0.04	0.0200	0.4348
A_3	0.15	0.15	0.0225	0.4891
$\sum$	1		P(A) = 0.0460	1.0000

Note que P(A) foi calculado recorrendo ao teorema da probabilidade total.

Elementos da Análise Combinatória

- *Arranjos de n elementos em grupos de k elementos (A_k^n)*: Considera-se um conjunto com n elementos distintos e suponha-se que a partir dele se formam grupos com um número fixo de k elementos (k=1, 2, …, n), não repetidos, mas onde os grupos diferem pela ordem em que os elementos são seleccionados.

$$A_k^n = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Os arranjos de k elementos formados a partir de um conjunto com n elementos podem ser considerados *amostras ordenadas sem reposição.*

- *Permutações (P_n)*: As permutações de um conjunto de n elementos distintos são arranjos de n elementos em grupos de n elementos, isto é, as permutações são grupos formados por todos os elementos do conjunto.

$$P_n = A_k^n = n(n-1)(n-2)...2*1 = n!$$

- ***Combinações (C_k^n):*** Calcula-se contando os arranjos de n elementos em grupos de k elementos, e eliminando as permutações que traduzem as diferentes ordens.

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{A_k^n}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

AULA PRÁTICA - FICHA 1

ATT: No final na última aula pratica desta ficha, será aplicado um Mini-teste que vai contar para as avaliações contínuas

1. Um lote contém 60 lâmpadas, sendo 50 boas e 10 defeituosas. 5 Lâmpadas são escolhidas ao acaso, sem reposição. Qual é a probabilidade de:
   a) Todas serem boas?
   b) Duas serem boas e três defeituosas?
   c) Pelo menos uma defeituosa?

2. Numa população, 55% dos indivíduos têm excesso de peso, 20% têm tensão arterial elevada e 60% têm ambas coisas. Esses dados permitem concluir que a tensão arterial é independente do excesso de peso? Justifique com base nos cálculos.

3. Numa fábrica trabalham 30 mulheres e 50 homens. A distribuição destes trabalhadores por classes de idades é a seguinte:

	Homens	Mulheres	Total
Menos de 21 anos	5	3	8
De 21 a 50 anos	30	18	48
Mais de 50 ano	15	9	24
Total	50	30	80

Escolhe-se uma pessoa ao acaso, determine a probabilidade de a pessoa escolhida:
   a) Ser homen
   b) Ter menos de 21 anos
   c) Ter menos de 21 anos, sabendo que é mulher
   d) Ter mais de 50 anos e ser mulher
   e) Ter mais de 50 anos, sabendo que é homen
   f) Ser mulher ou ter idade compreendida entre 21 e 50 anos

4. Uma urna I contém 2 bolas vermelhas e 3 bolas brancas, a urna II contém 4 bolas vermelhas e 5 bolas brancas. Uma urna é escolhida aleatoriamente e dela uma bola é escolhida ao acaso. Qual é a probabilidade de observarmos urna I e bola vermelha?

5. Em uma oficina de reparação dos televisores há 4 cinescópios. As probabilidades de que estes observem o tempo de garantia de serviço, são respectivamente iguais a 0.8, 0.85, 0.9, 0.95.

achar a probabilidade de que um cinescópio escolhido ao acaso observe o tempo de garantia de serviço.

6. Os cursos de Gestão (G), Contabilidade e Auditoria (CA), Tecnologias de Informação (TI) e Sociologia (S) de uma Universidade XYZ, graduam em média 40%, 30%, 10% e 20% respectivamente do número total de estudantes que entram por ano. As percentagens de graduação depois de 4 anos são 5% para G, 4%para CA, 3% para TI e 7% para S. Se um estudante é seleccionado ao acaso entre os graduados, determina:

a) A probabilidade de que uma determinada semana gradue um estudante que tenha frequentado a faculdade exactamente 4 anos.
b) A probabilidade de um estudante do Curso de Contabilidade e Auditoria graduar sabendo que frequentou a faculdade em apenas 4 anos.

7. Sabe-se que 10% dos veículos que passam em determinada artéria circulam com excesso de velocidade. por isso, a Polícia de Trânsito instalou um sistema para a detecção desses veículos. O sistema não é todavia infalível, pois, dos veículos multados, apenas 91.5% circulavam com excesso de velocidade, verificando-se ainda que 10% dos veículos multados não circulavam com excesso de velocidade.

a) Calcule a probabilidade de um veículo que circula naquela artéria ser multado.
b) Calacule a probabilidade de um veículo que circula com excesso de velocidade seja efectivamente multado.

8. Para a participação nas competições desportivas estudantis eliminatórias, foram selecionados do primeiro grupo 4 estudantes, do segundo, 6, e do terceiro, 5 estudantes. As probabilidades de que um estudante do primeiro, segundo e terceiro grupo caiam na seleçãodo Instituto são, respectivamente, iguais a 0.9, 0.7 e 0.8. Um estudante escolhido ao acaso foi selecionado. A qual dos grupos pertence com mais probabilidade este estudante?

9. Uma companhia multinacional tem três fábricas que produzem o mesmo tipo de produto. A fábrica I é responsável por 30% do total produzido, a fábrica II produz 45% do total, e o restante vem da fábrica III. Cada uma das fábricas, no entanto, produz uma proporção de produtos que não atendem aos padrões estabelecidos pelas normas internacionais. Tais produtos são considerados defeituosos" e correspondem a 1%, 2% e 1.5%, respectivamente, dos totais produzidos por fábrica. No centro de distribuição, é feito o controle de qualidade da produção combinada das fábricas.

a) Qual é a probabilidade de encontrar um produto defeituoso durante a inspeção de qualidade?
b) Se durante a inspeção, encontramos um produto defeituoso, qual é a probabilidade que ele tenha sido produzido na fábrica II?

10. Em um grupo de desportistas há 20 nadadores, 6 ciclistas e 4 corredores. A probabilidade de cumprir a prova de classificação é a seguinte: 0.9 para o nadador, 0.8 para o ciclista e 0.75 para o

corredor. Achar a probabilidade de que um desportista escolhido ao acaso cumpra a prova e seja corredor.

11. Num estudo 1000 pessoas foram classificadas segundo o sexo e o daltonismo tendo-se obtido os seguintes resultados:

	Feminino	Masculino
Não daltónico	514	442
Daltónico	6	38

a) Qual é a probabilidade de uma pessoa ser do sexo feminino, sabendo que a pessoa é daltónica?
b) Qual é a probabilidade de uma pesoa ser daltónica, sabendo que é do sexo masculino?
c) Os acontecimentos "ser Daltónica" e "ser do sexo masculino" são independentes?
d) Os acontecimentos "ser Daltónica" e "ser do sexo feminino" são independentes?

12. Uma clínica especializada trata 3 tipos de moléstias. X, Y e Z. 50% dos que procuram a clínica são portadores de X, 40% são portadores de Y e 10% de Z. As probabilidades de cura , nessa clínica, são: 0.8 para a moléstia X, 0.9 para a moléstia Y e 0.95 para a moléstia Z. Um enfermo saiu curado da clínica. Qual é a probabilidade de que ele sofresse da moléstia Z?

13. Um pesquisador estudou o comportamento de consumo de bebidas lácteas no Brasil. Analisou a classe econômica do consumidor e o principal aspecto determinante da escolha da marca. Os dados obtidos estão tabulados na tabela a seguir:

Classe/Aspecto	Preço	Qualidade	Total
Alta	42	56	98
Media	37	21	58
Baixa	13	97	110
Total	92	174	266

Qual a probabilidade de um consumidor escolhido o acaso:

a) Priorizar o preço, dado que é da classe alta;
b) Priorizar a qualidade, dado que é da classe media;
c) Ser da classe baixa, dado que atribui maior importância ao fator qualidade.

14. Um escritório possui 100 máquinas de calcular. Algumas dessas máquinas sào eléctricas, enquanto outras s`ao manuais; e algumas são novas, enquanto outras são muito usadas. A tabela dá o número de máquinas de cada categoria. Uma pessoa entra no escritório, pega uma máquina ao acaso, é descobre que é nova. Qualé a probabilidade de que seja eléctrica?

	Eléctrica	Manual	total
Nova	40	30	70
Usada	20	10	30

Total	60	40	100

15. Uma empresa possui 3 meios de Transporte T_1, T_2 e T_3, para colocar os seus produtos no mercado. Sabe-se que as probabilidades destes transportes atrasarem são, respectivamente 0.05, 0.01 e 0.25. Sabe-se ainda que estes meios de transporte são empregues com frequências inversamente proporcionais aos respectivos custos por remessas: 80, 40 e 16 unidades monetárias respectivamente.

a) Calcule as percentagens de utilização de cada um dos meios de transporte;
b) Considerando as remessas chegadas com atraso, qual a probabilidade de as mesmas terem sido transportadas por T_2?

16. Sabendo que três pessoas sofrem da mesma doença e têm probabilidade de se curarem, respectivamente iguais a 0.25, 0.15 e 0.10, determine a probabilidade de:

a) Nenhum se curar
b) Pelo menos duas se curarem

17. Certo plano de importações que uma empresa pretende levar a cabo, esta dependente do “tipo” de desvalorização que o Metical venha sofrer no corrente ano. De acordo com determinados critérios, essa desvalorização pode classificar-se de “fraca”, “média” e forte. Observadores económicos prevêem para esses itens as probabilidades de 0.3; 0.5 e 0.2, respectivamente. Por outro lado, levar a cabo esse plano de importações ocorrera com a probabilidade de 0.5 no caso de a desvalorização ser “fraca”, 0.15 se for “média” e 0.1 se for “forte”.

a) Neste contexto, qual a probabilidade de se concretizar o referido plano de importações?
b) Se, no próximo ano, souber que o plano se concretizou, qual dos tipos de desvalorização é mais provável que se tenha verificado?

18. Uma equipa de futebol ganha, perde ou empata, qualquer que seja o adversário, com probabilidade 0.6; 0.3 e 0.1 respectivamente. Se a equipa tiver que disputar 3 partidas na próxima semana, qual é a probabilidade de ganhar pelo menos duas partidas?

19. Imagine que acorda a meio da noite com uma enorme dor de cabeça. No armário há apenas dois tipos de comprimidos, A e B em 4 tubos, sendo 3 tubo c1om comprimidos do tipo A e 1 tubo com comprimidos de tipo B. Qualquer deles faz passar a dor de cabeça, mas tomando A em 40% dos casos fica-se agoniado, enquanto com B apenas em 20% dos casos se fica agoniado. Cheio(a) de sono, por ter acordado no meio da noite, agarra um dos tubos ao acaso, tira um comprimido deste tubo e toma;

a) Qual é a probabilidade de acordar agoniado;
b) Tendo acordado de manhã agoniado, qual dos dois tipos de comprimidos é mais provável ter tomado?

20. Na análise de uma amostra de 100 empresas portuguesas de importação e exportação, chegou-se à conclusão que os países de expressão portuguesa são os principais clientes dos seus produtos. De facto, das empresas analisadas, 40 exportam para Angola, 50 exportam para Moçambique e 25 exportam para ambos países. Seleccionada ao acaso uma destas empresas, calcule a probabilidade de ela exportar para:

a) Pelo menos para um dos países
b) Nenhum dos países
c) Angola mas não para Moçambique
d) Angola, sabendo que não para Moçambique

21. Um comerciante recebe ovos de 3 proveniências A, B e C segundo as percentagem seguintes: A – 10%, B – x% e C – 50%. A percentagem de ovos estragados varia segundo a proveniência, sendo que:

- Dos ovos originários de A, 5% são estragados;
- Dos ovos originários de B, 10% são estragados;
- Dos originários de C, y% são estragados;

Por outro lado, sabe-se que 12% do total dos ovos recebidos pelo comerciante são estragados. Calcule as percentagens x e y.

22. Um inquérito a 300 agregados familiares sobre o número de automóveis que possuem (X) e o respectivo rendimento mensal (Y) forneceu os seguintes resultados

Y \ **X**	**30-50**	**50-80**	**80-120**	**120-200**	**Total**
0	A	20	B	C	50
1	40	D	35	25	150
2	E	20	F	G	H
Total	70	I	65	J	K

Infelizmente, alguns valores se perderam. No entanto, sabe-se que 100 famílias possuem 2 carros e que todas as famílias com rendimento mensal entre 80 e 200 têm pelo menos um carro. Do grupo de famílias com mais baixo rendimento nenhum tem mais do que um carro. Com base nesta informação, complete o quadro.

23. Numa determinada cidade, um quarto dos automobilistas deixa as chaves no carro. A polícia prevê que 5% dos carros com chaves esquecidos na ignição serão roubados, mas somente 1% dos carros sem chaves esquecidos na ignição serão roubados. Qual é a probabilidade de um carro que foi roubado nessa cidade, as chaves estarem na ignição?

24. Uma Empresa Química possui duas divisões: Industrial e Comercial. Um analista estima que a divisão Industrial possui 70% de chances de apresentar lucro neste ano. Ele mantém que a divisão Comercial possui apenas 50% de chances de apresentar lucros, mas se o fizer, ele garante a divisão industrial possui 90% de chances de ser também lucrativa.

a) Achar a probabilidade de que as duas divisões serão lucrativas.
b) Qual é a abordagem de probabilidade implícito nas afirmações do Analista?

25. As seguintes frequências da Tabela de Contingência foram baseadas num estudo de 5 anos sobre fatalidades em acidentes de viação no país. Para efeitos de clarificação, as colunas e linhas estão identificadas pelas letras A – C, e D – G respectivamente.

		Niveis de alcool No sangue das vitimas			
		A	**B**	**C**	
	Idade	**0.00%**	**0.01 - 0.09%**	**≥ 0.10%**	
D	**0 - 19**	142	7	6	**155**
E	**20 - 39**	47	8	41	**96**
F	**40 - 59**	29	8	77	**114**
G	**60 e +**	47	7	35	**89**
		265	**30**	**159**	**454**

a) Identifica quaisquer dois acontecimentos que sejam mutuamente exclusivos;
b) Identifica quaisquer dois acontecimentos que se intersectam;
c) Qual é a probabilidade de que uma vitima seleccionada aleatoriamente tenha pelo menos 60 anos e tenha níveis de álcool no sangue de pelo menos 0.10%?
d) Qual é a probabilidade de que uma vítima seleccionada ao acaso tenha níveis de álcool no sangue igual ou superior a 0.10% sabendo que tem idade entre 20 e 39 anos.

26. Cinquenta por cento dos pacientes aceites numa clínica sofrem de doença K, 30% sofrem da doença L e 20% da doença M. A probabilidade de cura completa sendo igual a 0.7 para K, 0.8 para L e 0.9 para M. Achar a probabilidade de que o paciente curado sofresse da doença K.

27. Dois abastecedores A e B fornecem uma empresa transformadora com o mesmo artigo, que é armazenado num contentor. Até determinada data, 5% dos produtos fornecidos por A e 9% dos fornecidos por B eram defeituosos. A fornece o quádruplo de B. Tendo sido escolhido ao acaso um dos produtos, verificou-se não ser defeituoso. Qual a probabilidade de ter sido fornecido por A?

28. Bastando uma bomba para destruir uma ponte, achar a probabilidade da sua destruição ao se largarem três bombas que atingem com a probabilidade de 0.4; 0.6 e 0.7, respectivamente.

29. Três caixas contendo, cada uma, 20 peças, respectivamente 20, 15 e 10 peças são padronizadas. De uma caixa tomada ao acaso, extrai-se ao acaso uma peça constatando-se que esta é padronizada. A peça se restitui a caixa e se repete uma extracção ao acaso desta mesma caixa que fornece igualmente uma peça padronizada. Achar a probabilidade de que as extracções se tenham praticado da terceira caixa.

30. Numa entrevista, um economista afirma que considerava a "melhoria" da situação económica tão provável como a sua estagnação". No entanto encarava a "melhoria" como três vezes mais provável que a "quebra" da actividade económica.

a) Que espaço de resultados esta implícito nestas afirmações?
b) Qual a probabilidade associada a cada resultado deste espaço?
c) Que conceito de probabilidade esta implícito neste problema?

31. A probabilidade a *prior*i para dois acontecimentos A_1 e A_2 são $P(A_1)=0.30$ e $P(A_2)=0.7$. sabe-se também que $P(A_1 \text{ e } A_2) = 0$. Suponha que $P(B/ A_1)=0.15$ e $P(B/ A_2) = 0.015$.

a) Serão os acontecimentos A1 e A2 mutuamente exclusivos? Justifique.
b) Calcule P(A1 e B);.
c) Calcule $P(A_2 \text{ e } B)$;

32. O mercado de serviço de telemóvel está dividido entre duas empresas A, B e C com quotas respectivamente de 50%, 30% 20%. O organismo regulador encomendou um estudo de opinião do mercado do qual concluiu que:

- 80% dos utilizadores do serviço telemóvel estão satisfeitos
- dos clientes do operador A, 75% estão satisfeitos
- dos clientes do operador B, 85% estão satisfeitos

a) Qual é a percentagem de clientes do operador C que estão satisfeitos?
b) Qual a divisão do mercado dentro dos clientes satisfeitos?

33. Numa salva de três canhões, dois atiradores acertaram no alvo. Achar a probabilidade de ter acertado o terceiro, a probabilidade de acerto do 1º, 2º e 3º sendo respectivamente igual a 0.6; 0.5 e 0.4.

34. Uma empresa fabrica aparelhos eléctricos através de 2 cadeias de produção (A e B) no volume semanal de 2000 e 3000 respectivamente. A percentagem de produtos defeituosos em cada cadeia é de 0.05 e 0.02 respectivamente. Da produção da última semana extraiu-se uma amostra de um elemento que se verificou ser defeituoso. Qual é a Cadeia de Produção mais provável ter produzido o elemento?

35. Na primeira caixa há 20 peças, das quais 18 estão pintadas; na segunda caixa há 10 peças das quais 9 são pintadas. Da segunda caixa foi tirada uma peça ao acaso e colocada na primeira caixa. Achar a probabilidade de que a peça extraída ao acaso da primeira caixa seja pintada.

36. Uma empresa de construção ABC está a considerar a possibilidade de concorrer a um concurso de construção de um Centro Comercial. No passado, o seu maior concorrente concorre 70% das vezes que se lança um concurso do género. Se o seu concorrente não o fizer, a probabilidade de que a empresa ganhará o contrato é de 0.5. Se o seu concorrente concorrer, a probabilidade de a empresa ABC ganhar o contrato é de 0.25.

a) Qual é a probabilidade de a empresa ganhar o contrato?
b) Se a empresa de construção ganhar o contrato, qual é a probabilidade de que o seu concorrente não concorreu?

37. A seguinte Tabela de Contingência de Frequências mostra o número de trabalhadores de uma empresa classificadas por idade e categoria de produção:

Idade	**Produção**	**Vendas**	**Administração**	**Total**
< 25	50	2	50	**102**
25 – 40	70	24	50	**144**
>40	40	4	10	**54**
Total	**160**	**30**	**110**	**300**

Um trabalhador é seleccionado aleatoriamente. Calcule a probabilidade de que ele/ela:

a) Tem idade < 25; b) Trabalha na produção
b) O trabalhador tem idade inferior a 25 sabendo que trabalha no sector da produção;
c) O trabalhador trabalha no sector da produção sabendo que tem idade inferior a 25 anos:

38. Duas firmas locais de construção competem entre si quando concorrem a um concurso para adjudicação de um contrato de uma obra de construção. Num passado recente, dos 20 contratos em que concorreram 10 foram ganhos pela firma A, seis pela firma B e os restantes pelas outras firmas. Três novos concursos para adjudicação de três contratos foram lançados. Qual é a probabilidade de:

a) A firma A ganhe os 3 contratos?
b) B obtenha pelo menos um contrato?

39. A probabilidade de que, em um disparo, um atirador acerte no alvo é igual a 0.4. Quantas vezes o atirador deve disparar, para que, com a probabilidade não menor que 0.9, acerte no alvo pelo menos uma vez?

40. Uma caixa contém 12 peças provenientes de uma fábrica, 20 peças de outra fábrica, e 18 de uma terceira fábrica. A probabilidade destas serem de qualidade superior é de 0.9, 0.6 e 0.9 respectivamente. Achar a probabilidade de ser de qualidade superior uma peça escolhida ao acaso.

41. Uma loja de brinquedos emprega 3 mulheres para fazerem embrulhos durante época de Natal. Raquel embrulha 40% dos presentes e esquece-se de tirar o preço 3% das vezes; Helena

embrulha 30% dos presentes e esquece-se de tirar o preço 8% das vezes; Joana, que embrulha 25% dos presentes, esquece-se de tirar o preço 5% das vezes.

a) Qual é a probabilidade de um presente comprado nessa loja ainda ter o preço?
b) Suponha que tinha ido a essa loja, verificando em casa que o seu presente ainda tinha preço. Qual é a probabilidade de ter sido embrulhado pela Joana?

42. Os participantes de um sorteio tiram de uma caixa fichas enumeradas de 1 a 100. Achar a probabilidade de que a primeira ficha extraída ao acaso, não contenha algarismo 5.

43. As famílias da cidade A escolhem uma das três alternativas para passar suas férias: praia, campo ou ficar em casa. Durante a última década, verificou-se que 50% das famílias escolheram passar férias na praia, 30% campo e 20% das famílias escolheu ficar em casa. A probabilidade de descansar durante as férias é, para cada uma das alternativas igual a 0.4; 0.6 e 0.5 respectivamente.

a) Qual é a probabilidade de uma família da cidade A descansar durante as férias?
b) Sabendo que determinada família descansou durante as férias, qual é a alternativa mais provável de ter sido escolhida por essa família?

44. R entrou agora na universidade e foi informado de que há 30% de possibilidade de vir a receber uma bolsa. No caso de a receber, a probabilidade de se licenciar é de 0.85 enquanto que no caso de não a obter, a probabilidade de se licenciar é de apenas 0.45.
a) Diga a R, qual é a probabilidade de que ele se licencie.
b) Se, daqui a uns anos, encontrar R já licenciado, qual a probabilidade de que tenha recebido a bolsa de estudo?

45. Uma empresa adquiriu duas máquinas X e Y. Estima-se que a maquina X possui 80% de chances de durar 3 anos e a maquina Y 75%. Qual é a probabilidade de

a) Ambas máquinas durem 3 anos;
b) Nenhuma máquina dure 3 anos;
c) Pelo menos uma máquina dure 3 anos;

46. Respectivamente 60 e 84 por centos das peças fornecidas por duas máquinas automáticas, a produtividade da primeira sendo o dobro da segunda, são de alta qualidade. Tendo-se constatado que uma peça escolhida ao acaso é de alta qualidade, a) achar a probabilidade de que provenha da primeira máquina; b) achar a probabilidade de que provenha da primeira ou da segunda.

47. Uma biblioteca contém dez livros diferentes, sendo que cinco livros custam US$ 4.0 cada um, três livros custam US$ 1 cada e dois livros – US$ 3.0. Achar a probabilidade de que dois livros, tomados ao acaso, custem US$ 5.0.

48. Duas pessoas fizeram o mesmo trabalho consistente na perfuração de um determinado pacote de cartas. A probabilidade de cometerem um erro sendo igual a 0.05 e 0.1 respectivamente, calcular a probabilidade de que um erro que se encontrou, tenha sido cometido pela primeira pessoa.

49. Cada objecto manufacturado é submetido para exame com a probabilidade 0.55 a um controlador e com a probabilidade 0.45 a um outro. A probabilidade de passar o exame é, segundo o controlador, respectivamente igual a 0.9 e 0.98. Achar a probabilidade de que um objecto aceite tenha sido examinado pelo segundo controlador.

50. Numa empresa com 300 funcionários, 200 trabalham com um computador e um quarto fala inglês fluentemente. Sabe-se ainda que trabalham com um computador 4/5 dos que falam inglês fluentemente. Seleccionando-se ao acaso um destes funcionários, qual a probabilidade de ele:

a) Trabalhar com um computador e falar fluentemente inglês?
b) Falar inglês fluentemente e não trabalhar com um computador;