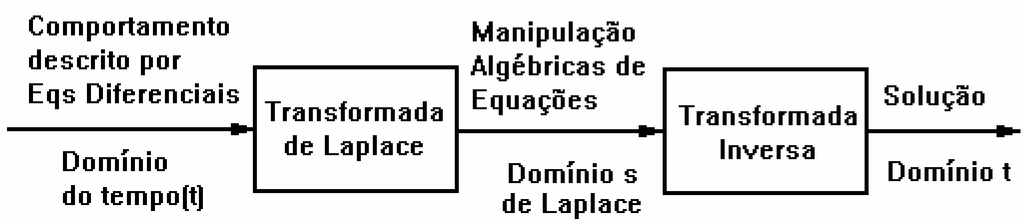
O MÉTODO

O método de transformada de Laplace é um método muito útil para resolver equações diferenciais ordinárias (EDO). Com a transformada de Laplace, pode-se converter muitas funções comuns, tais como, senoidais e amortecidas, em equações algébricas de uma variável complexa "***s***". As equações diferenciais também podem ser transformadas em equações algébricas através da transformada de Laplace.

DEFINIÇÃO

A transformada de Laplace é uma operação semelhante a transformada logarítmica. As equações diferenciais são transformadas em equações algébricas, em que pode-se realizar operações algébricas normais no domínio "***s***" e depois retornando ao domínio "***t***" através da inversa.

Esquematicamente:



O matemático francês Pierre Simon de Laplace (1749 - 1827) descobriu um meio de resolver as equações diferenciais que consiste em:

- Multiplicar cada termo da equação por e^{-st}
- Integrar cada termo em relação ao tempo de zero a infinito
- "***s***" é uma constante de unidade de um ***1/tempo***.

A transformada de Laplace de uma função f(t) é definida como:

$$F(s) = \mathcal{L}\left[f(t) \right] = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

Onde: *F(s)* - Símbolo da transformada de Laplace
f(t) - Função do tempo contínua para 0 < t < ∞
$\mathcal{L}$ - Operador de Laplace

Inversa da transformada de Laplace

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[f(s)]$$

Onde: *f(t)* - Função do tempo que não é definida para t<0
$\mathcal{L}^{-1}$ - Operador de inversa de Laplace

PROPRIEDADES

As propriedades básicas são:

1. Soma de duas funções

$$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] + \mathcal{L}[f_2(t)] = F_1(s) + F_2(s)$$

2. Multiplicação por constante

$$\mathcal{L}[af(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] = aF(s)$$

3. Função com atraso no tempo

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{-t_0 s}F(s)$$

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)] = \int_0^\infty f(t-t_0)e^{-s(t-t_0)}d(t-t_0) = e^{s\,t_0}\int_0^\infty f(t)e^{-s\,t}dt$$

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{s\,t_0}F(s)$$

4. Derivada primeira de uma função

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0) \qquad onde: \quad f(0) = f(t=0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}e^{-s\,t}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-s\,t}dt + f(t)e^{-s\,t}\Big|_0^\infty = s\mathcal{L}[f] - f(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$$

5. Derivada segunda de uma função

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = s^2 F(s) - sf(0) - \frac{df(0)}{dt} \qquad onde: \quad \frac{d}{dt} f(t=0)$$

fazendo $\phi = \dfrac{df}{dt}$ ou $\phi(s) = sF(s) - f(0)$

$$\mathcal{L}\left[d^2 f/dt^2\right] = \mathcal{L}\left[d\phi/dt\right] = s\phi(s) - \phi(0)$$

substituindo

$$\mathcal{L}\left(d^2 f/dt^2\right) = s\left[sF(s) - f(0)\right] - \phi(0) = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

6. Derivada n-ésima de uma função

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right] = s^n F(s) - S^{n-1} f(0) - S^{n-2} \frac{d}{dt} f(0) - \ldots\ldots - \frac{d^{n-1}}{dt} f(0)$$

7. Integral de uma função entre instantes 0 e t

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) = \frac{1}{s} F(s)\right] = \frac{1}{s} F(s)$$

EXEMPLOS DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

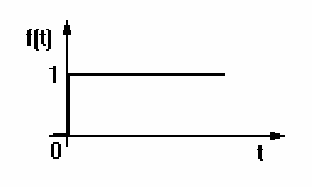
1. Função constante

$$f(s) = a$$

$$f(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right] = \int_0^\infty a e^{-st} \quad dt = -\frac{a}{s} e^{-st}\Big|_0^\infty = 0 - \left(-\frac{a}{s}\right)$$

$$F(s) = \frac{a}{s}$$

2. Função de grau unitário

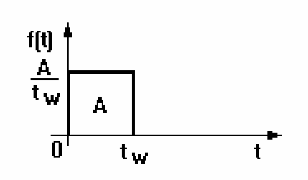


$$f(t) = \begin{cases} 0 & p/t < 0 \\ 1 & p/t \geq 0 \end{cases}$$

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} 1.e^{-s\,t}\,dt = -\frac{1}{s}e^{-s\,t}\Big|_0^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{s}\right)$$

$$F(s) = \frac{1}{s}$$

3. Função Pulso

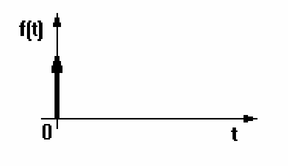


$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \dfrac{A}{t_w} & 0 \leq t < t_w \\ 0 & t \geq t_w \end{cases}$$

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-s\,t}\,dt = \int_0^{t\,w} \frac{a}{t_w} e^{-s\,t}\,dt = \frac{a}{t_w s} e^{-s\,t}\Big|_0^{t_w} = \frac{a}{t_w s}\left(1 - e^{-s\,t_w}\right)$$

$$F(s) = \frac{A}{t_w s}\left(1 - e^{-tws}\right)$$

4. Função Impulso (Delta de Dirac)



$$\delta(t)\begin{cases} f(t) = \lim\limits_{t_w \to 0} \dfrac{A}{t_w} \; para \;\; 0 < t < t_o \\ f(t) = 0 \; para \;\; t < 0 \; e \; t > t_w \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \lim_{t_w \to 0} \frac{A}{t_w s}\left(1 - e^{-t_w s}\right)$$

Aplicando a regra de ***L'Hôpital***

$$\mathcal{L}[f(t)] = \lim_{t_w \to 0} \frac{\frac{d}{dt_w}\left[A\left(1-e^{-t_w s}\right)\right]}{\frac{d}{dt_w}\left(t_w s\right)} = \frac{As}{s} = A$$

$$F(s) = A$$

5. Função exponencial

$$F(t) = e^{-bt}$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-bt} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(b+s)t} dt = \frac{1}{b+s}\left[-e^{-(b+s)t}\right]_0^\infty = \frac{1}{b+s}$$

$$F(s) = \frac{1}{b+s}$$

OBS.: A transformada de Laplace não é definida para b < 0.

6. Função trigonométrica

$$F(t) = \cos\omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{j\omega t}\right] + \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{-j\omega t}\right] = \frac{1}{2}\ \frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{2}\ \frac{1}{s+j\omega}$$

$$F(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega}\right)$$

TEOREMA DO VALOR FINAL

O teorema do valor final relaciona o comportamento em regime estacionário de ***f(t)***, isto é, o ganho da função.

Teorema: Se uma transformada de Laplace é multiplicada por ***s***, o valor do produto fazendo ***s*** tender a zero é o valor da transformada inversa com ***t*** tendendo a infinito.

$$f(\infty) = \lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

TEOREMA DO VALOR INICIAL

O teorema do valor inicial não dá o valor de ***f(t)*** em ***t = 0***, mais num tempo ligeiramente superior a zero.

Teorema: Se uma transformada de Laplace é multiplicada por ***s***, o valor do produto fazendo ***s*** tender a infinito é o valor da transformada inversa com ***t*** tendendo a zero.

$$f(0^+) = \lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

Exemplo:

$$G(s) = \frac{5s+2}{s(5s+4)}$$

$$G(0^+) = \lim_{s \to \infty} [sG(s)] = \lim_{s \to \infty} \frac{5s+2}{5s+4} = 1$$

$$G(\infty) = \lim_{s \to 0} [sG(s)] = \lim_{s \to 0} \frac{5s+2}{5s+4} = \frac{1}{2}$$

TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

O processo matemático de se passar da expressão com variáveis complexas para expressão no tempo é chamada ***transformada inversa***. A notação da transformada inversa é :

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$$

Um método conveniente para se obter as transformadas inversas de Laplace, consiste em usar uma tabela de transformadas de Laplace. Neste caso, a transformada de Laplace deve entrar em forma imediatamente reconhecível na tabela.

Se uma transformada ***F(s)*** não puder encontrada na tabela, então deve-se expandir em frações parciais e escrever ***F(s)*** em termos de funções simples de "**s**" nas quais as transformadas são conhecidas.

EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS

Para resolver uma expressão algébrica em frações parciais, o denominador deve ser fatorado. O numerador deve ser pelo menos um grau abaixo do denominador. Quando o grau do numerador for igual ou maior do denominador, o numerador deve ser dividido pelo denominador para dar termos que sejam pelo menos um grau abaixo do denominador.

Existem três tipos básicos de frações parciais, as formas são as seguintes:

1. Fatores lineares no denominador

Expressão:

$$G(s) = \frac{z(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)}$$ *p_i (i = 1:n) raízes distintas*

Frações Parciais:

$$G(s) = \frac{A}{s+p_1} + \frac{B}{s+p2} + \ldots + \frac{N}{s+p_n}$$

$$A = \lim_{s \to p_1}[(s+p_1)G(s)]$$
$$B = \lim_{s \to p_2}[(s+p_2)G(s)]$$
$$N = \lim_{s \to p_n}[(s+p_n)G(s)]$$

Exemplo 1

$$G(s) = \frac{1}{s\left(s^3 + 6s^2 + 11s + 6\right)} = \frac{1}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$G(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+1)} + \frac{C}{(s+2)} + \frac{D}{(s+3)}$$

$$A = \lim_{s \to 0}\left[(s+0)\frac{1}{s(s+1)(s+2)(s+3)}\right] = \frac{1}{6}$$

$$B = \lim_{s \to -1}\left[(s+1)\frac{1}{s(s+1)(s+2)(s+3)}\right] = -\frac{1}{2}$$

$$C = \lim_{s \to -2}\left[(s+2)\frac{1}{s(s+1)(s+2)(s+3)}\right] = \frac{1}{2}$$

$$D = \lim_{s \to -3}\left[(s+3)\frac{1}{s(s+1)(s+2)(s+3)}\right] = -\frac{1}{6}$$

$$G(s) = \frac{1}{6s} - \frac{1}{2(s+1)} + \frac{1}{2(s+2)} - \frac{1}{6(s+3)}$$

2.Fatores lineares repetidos no denominador

Expressão:

$$G(s) = \frac{z(s)}{(s+p_1)^k (s+p_2)\ldots(s+p_n)}$$

Frações Parciais:

$$G(s) = \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{(s-p_1)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(s-p_1)^k} + \frac{B}{(s-p_2)} + \ldots. + \frac{N}{(s-p_n)}$$

$$A_k = \lim_{s \to p_1}\left[(s+p_1)^k G(s)\right]$$

$$A_{k-1} = \lim_{s \to p_1} \left\{ \frac{d}{ds} \left[(s + p_1)^k G(s) \right] \right\}$$

$$A_1 = \lim_{s \to p_2} \left\{ \frac{d^{(k-1)}}{ds^{(k-1)}} \left[(s + p_1)^k G(s) \right] \right\}$$

$$B = \lim_{s \to p_2} \left[(s + p_2) G(s) \right]$$

$$N = \lim_{s \to p_n} \left[(s + p_n) G(s) \right]$$

Exemplo 2

$$G(s) = \frac{s+1}{s\left(s^2+4s+4\right)} = \frac{s+1}{s(s+2)^2}$$

$$G(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+2)} + \frac{C}{(s+2)^2}$$

$$A = \lim_{s \to 0} \left[(s+0) \frac{s+1}{s(s+2)^2} \right] = \frac{1}{4}$$

$$B = \lim_{s \to -2} \left\{ \frac{d}{ds} \left[(s+2)^2 \frac{s+1}{s(s+2)^2} \right] \right\} = \lim_{s \to -2} \left\{ \frac{d}{ds} \left[\frac{s+1}{s} \right] \right\} = \lim_{s \to -2} \left(\frac{1}{s^2} \right) = -\frac{1}{4}$$

$$C = \lim_{s \to -2} \left\{ \left[(s+2)^2 \frac{s+1}{s(s+2)^2} \right] \right\} = \lim_{s \to -2} \left\{ \left[\frac{s+1}{s} \right] \right\} = \frac{1}{2}$$

$$G(s) = \frac{1}{4s} - \frac{1}{4(s+2)} + \frac{1}{2(s+2)^2}$$

3.Fatores complexos conjugados no denominador

Quando a função possui pólos complexos

Nesses casos a função temporal sempre envolve produto de uma exponencial e um seno ou cosseno como indicado a seguir:

$$\mathcal{L}\left[Ae^{-at}\cos\omega(t)\right] = \frac{A(s+a)}{(s+a)^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}\left[Ae^{-at}sen\omega(t)\right] = \frac{B(s+a)}{(s+a)^2+\omega^2}$$

Quando a função possui pólos complexos e reais.

Para utilizarmos os resultados das seções anteriores devemos primeiro separar os pólos complexos dos reais da seguinte forma:

Expressão:

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s+p_1)(s^2+as+b)\cdots} = \frac{K_1}{(s+p_1)} + \frac{K_2 s + K_3}{(s^2+as+b)} + \cdots$$

onde K_1 é obtido como definido no item 1 e K_2 e K_3 são determinados por igualdade polinomial atribuindo-se valores a *s*.

Exemplo 3

$$G(s) = \frac{3}{s\left(s^2+2s+5\right)}$$

$$G(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_{2s}+K_3}{s^2+2s+5}$$

K_1 pode ser obtido pelo procedimento habitual e vale 3/5. K_2 e K_3, podem ser determinados simplificando a equação anterior e comparando os polinômios:

$$\frac{3}{s\left(s^2+2s+5\right)} = \frac{3}{5s} + \frac{K_{2s}+K_3}{s^2+2s+5}$$

$$3 = \left(\frac{3}{5}+K_2\right)s^2 + \left(K_3+\frac{6}{5}\right)s + 3$$

Portanto K_2=-3/5 e K_3=-6/5. Ajustando os termos:

$$F(s) = \frac{3/5}{s} - \frac{3}{5}\left(\frac{(s+1)+(0{,}5)(2)}{(s+1)^2+2^2}\right)$$

utilizando da tabela de laplace, encontramos:

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-t}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}sen2t\right)$$

SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS POR LAPLACE

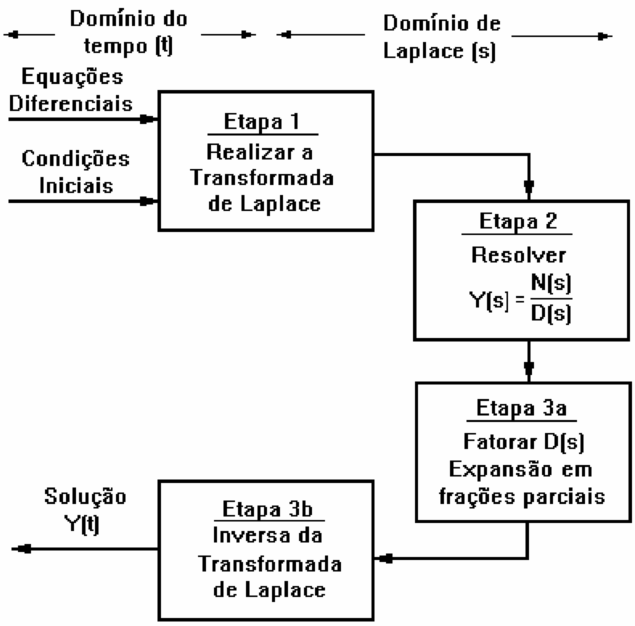
O procedimento que envolve utilizar a transformada de Laplace para obter a solução de uma equação diferencial é o seguinte:

1. Transformar cada termo da equação diferencial em suas transformadas de Laplace, isto é, mudar a função do tempo para uma função de "s ".

2. Pesquisar todas as manipulações - por exemplo, considerar o que acontece quando uma entrada degrau é aplicada ao sistema.

3. Converter a função de Laplace resultante em uma equação como função do tempo, isto é, operação inversa da transformação de Laplace. Para usar as tabelas de transformadas de Laplace e assim determinar a conversão, é freqüentemente necessário decompor em frações parciais para obter as formas padrões dadas nas tabelas.

Esquematicamente:



Exemplo

Seja a equação diferencial

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3}+6\frac{d^2y(t)}{dt^2}+11\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=u(t)$$

com as seguinte condições iniciais:

$$\frac{d^2y(0)}{dt^2}=0,\quad \frac{dy(0)}{dt}=0,\quad y(0)=0$$

aplique um degrau unitário em ***u***

u(t) = 1

Etapa 1 (Aplicação da transformada de Laplace)

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^3y(t)}{dt^3}\right]+6\mathcal{L}\left[\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right]+11\mathcal{L}\left[\frac{dy(t)}{dt}\right]+6\mathcal{L}[y(t)]=\mathcal{L}[u(t)]$$

$$\left[s^3y(s)-s^2y(0)-s\frac{dy(0)}{dt}-\frac{d^2y(0)}{dt^2}\right]+6\left[s^2y(s)-sy(0)-\frac{dy(0)}{dt}\right]+$$
$$+11[sy(s)-y(0)]+6y(s)=u(s)$$

$$s^3y(s)+6s^2y(s)+11sy(s)+6y(s)=u(s)$$

$$y(s)=\frac{1}{s^3+6s^2+11s+6}u(s)$$

$$\mathcal{L}[u(t)]=u(s)=\frac{1}{s}$$

Etapa 2 (Operação com a função de transferência)

$$y(s)=\frac{1}{s^3+6s^2+11s+6}\times\frac{1}{s}$$

$$y(s)=\frac{1}{s(s^3+6s^2+11s+6)}$$

$$y(s)=\frac{1}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Etapa 3a (Expansão em frações parciais)

$$y(s)=\frac{A}{s}+\frac{B}{(s+1)}+\frac{C}{(s+2)}+\frac{D}{(s+3)}$$

$$A=\lim_{s\to 0}\left[(s+0)\frac{1}{s(s+1)(s+2)(s+3)}\right]=\frac{1}{6}$$

$$B=\lim_{s\to -1}\left[(s+1)\frac{1}{s(s+1)(s+2)(s+3)}\right]=-\frac{1}{2}$$

$$C=\lim_{s\to -2}\left[(s+2)\frac{1}{s(s+1)(s+2)(s+3)}\right]=\frac{1}{2}$$

$$D=\lim_{s\to -3}\left[(s+3)\frac{1}{s(s+1)(s+2)(s+3)}\right]=-\frac{1}{6}$$

$$y(s)=\frac{1}{6s}-\frac{1}{2(s+1)}+\frac{1}{2(s+2)}-\frac{1}{6(s+3)}$$

Etapa 3b (Aplicação da transformada inversa de Laplace)

$$\mathcal{L}^{-1}\left[y(s)\right]=\frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)}\right]+\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)}\right]-\frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+3)}\right]$$

$$y(t)=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}-\frac{1}{6}e^{-3t}$$

TABELA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

	Função	Transformada
	f(t)	F(S)
1	Impulso unitário $\delta(t)$	1
2	Degrau unitário 1(t)	$\frac{1}{s}$
3	Rampa Unitária t	$\frac{1}{s^2}$
4	t^n (n = 1,2,3,...)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
6	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
7	$t^n e^{-at} \qquad (n = 1,2,3,\ldots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
8	$\frac{1}{a}\left(1 - e^{-at}\right)$	$\frac{1}{s(s+a)}$
9	$\frac{1}{a^2}\left(1 - e^{-at} - ate^{-at}\right)$	$\frac{1}{s(s+a)^2}$
10	$\frac{1}{b-a}\left(e^{-at} - e^{-bt}\right)$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
11	$\frac{1}{b-a}\left(be^{-bt} - ae^{-at}\right)$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
12	$\operatorname{sen} \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
13	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
14	Senóide Amortecida $e^{-at} \operatorname{sen} \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
15	Cossenóide Amortecida $e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
16	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \operatorname{sen} \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$